



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV AUTOMATIZACE A INFORMATIKY

INSTITUTE OF AUTOMATION AND COMPUTER SCIENCE

VÝZNAM LAPLACEOVY TRANSFORMACE V TEORII REGULACE

THE IMPORTANCE OF LAPLACE TRANSFORM IN REGULATION THEORY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Karolína Kovářová

VEDOUcí PRÁCE

SUPERVISOR

Mgr. Monika Dosoudilová, Ph.D.

BRNO 2021

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav automatizace a informatiky
Studentka: **Karolína Kovářová**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **Mgr. Monika Dosoudilová, Ph.D.**
Akademický rok: 2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Význam Laplaceovy transformace v teorii regulace

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Využití a výhody Laplaceovy transformace v úlohách spojitého lineárního řízení.

Cíle bakalářské práce:

Zpracování rešerše na téma Laplaceova transformace.

Využití Laplaceovy transformace v teorii přenosu.

Řešení konkrétních úloh regulace a srovnání z pohledu matematiky a teorie řízení.

Laplaceova transformace s využitím softwaru Matlab.

Seznam doporučené literatury:

ŠVARC, Ivan. Automatické řízení. Vyd. 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011. ISBN 978-80-214-4398-3.

KOUKAL, Stanislav. Laplaceova transformace. Brno: VUT, 1979. Učební texty vysokých škol.

KUBÍK, Stanislav, Zdeněk KOTEK a Miroslav ŠALAMON. Teorie regulace: vysokoškolská učebnice pro elektrotechnickou fakultu vysokých škol technických. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1969.

ŠKRÁŠEK, Josef a Zdeněk TICHÝ. Základy aplikované matematiky. Praha: SNTL, 1990. ISBN 80-0-00111-0.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

doc. Ing. Radomil Matoušek, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce pojednává o důležité roli Laplaceovy transformace v teorii regulace. Rešeršní část je věnována vlastnostem této integrální transformace a popisu regulačního obvodu. Využití Laplaceovy transformace při hledání regulované veličiny, přechodové a impulsní funkce je demonstrováno na konkrétních příkladech z teorie kmitání. Závěrečná část nabízí pohled na Laplaceovu transformaci s využitím softwaru MATLAB.

ABSTRACT

This bachelor's thesis deals with the significant role of Laplace transform in regulation theory. The theoretical part is dedicated to the properties of this integral transform and the description of the control system. The usage of Laplace transform in search of process variable, step and impulse function is demonstrated on specific examples of oscillation theory. The final part offers a view on Laplace transform using MATLAB software.

KLÍČOVÁ SLOVA

Laplaceova transformace, diferenciální rovnice, přenos, regulační obvod, MATLAB

KEYWORDS

Laplace transform, differential equation, transfer function, control system, MATLAB



ÚSTAV AUTOMATIZACE
A INFORMATIKY



2021

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

KOVÁŘOVÁ, Karolína. *Význam Laplaceovy transformace v teorii regulace*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav automatizace a informatiky, 2021. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/132934>.
Bakalářská práce. Vedoucí práce: Mgr. Monika Dosoudilová, Ph.D.

PODĚKOVÁNÍ

Ráda bych poděkovala vedoucí Mgr. Monice Dosoudilové, Ph.D. za všechny čas, který věnovala konzultacím a korekturám této práce. Velký dík taktéž patří mé rodině a blízkým za jejich trpělivost a podporu během celého mého studia.

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že tato práce je mým původním dílem, vypracovala jsem ji samostatně pod vedením vedoucí práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury.

Jako autorka uvedené práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této práce jsem neporušila autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhla nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědoma následku porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona c. 121/2000 Sb., včetně možných trestně právních důsledků.

V Brně dne 21. 5. 2021

.....

Karolína Kovářová

OBSAH

1	ÚVOD.....	15
2	LAPLACEOVA TRANSFORMACE	17
2.1	Podmínky $f(t)$ pro existenci obrazu	17
2.2	Definice Laplaceovy transformace	18
2.3	Zpětná Laplaceova transformace.....	18
2.4	Slovník Laplaceovy transformace	20
2.5	Vlastnosti Laplaceovy transformace.....	21
2.5.1	Linearita transformace	21
2.5.2	Vybraná základní pravidla	21
2.5.3	Konvoluce funkcí	22
2.6	Odvození Laplaceova obrazu $\delta(t)$ a $\eta(t)$	22
2.7	Řešení diferenciálních rovnic.....	24
3	VYUŽITÍ LAPLACEOVY TRANSFORMACE V TEORII REGULACE	27
3.1	Regulační obvod	28
3.2	Vlastnosti regulačního členu	29
3.3	Diferenciální rovnice systému.....	29
3.4	Přenos systému	30
3.5	Impulsní funkce	31
3.6	Přechodová funkce	32
3.7	Regulační členy	33
3.7.1	Proporcionální regulační členy.....	34
3.7.2	Derivační regulační členy	36
3.7.3	Integrační regulační členy	37
3.8	Frekvenční přenos a charakteristika	38
3.9	Dopravní zpoždění.....	39
3.10	Bloková algebra.....	39
3.10.1	Sériové zapojení	40
3.10.2	Paralelní zapojení	40
3.10.3	Antiparalelní (zpětnovazební) zapojení	41
3.10.4	Řešení překřížených vazeb.....	42
3.10.5	Regulační obvod v blokové algebře	43
3.11	Regulátory	44
3.11.1	Dynamické vlastnosti ústředního členu regulátoru	45
4	ŘEŠENÍ KONKRÉTNÍCH ÚLOH REGULACE	47
4.1	Určení regulované veličiny	47
4.2	Přechodová funkce	48
4.3	Impulsní funkce	50
5	VYUŽITÍ PROGRAMU MATLAB.....	51
5.1	Laplaceova transformace	51
5.2	Řešení diferenciálních rovnic.....	51
5.3	Definice přenosu.....	53
5.4	Impulsní charakteristika.....	53
5.5	Přechodová charakteristika	54
5.6	Bloková algebra.....	55
6	ZÁVĚR.....	57

7	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	59
8	SEZNAM OBRÁZKŮ	61
9	SEZNAM TABULEK	63

1 ÚVOD

Trendem současné moderní společnosti je neustálá snaha o zvýšení produktivity a o snižování nutnosti lidského faktoru ve výrobním procesu. Nebezpečné, únavné a fyzicky či mentálně náročné úkony jsou proto přenechávány strojům a počítačům. Takovýto proces nazýváme automatizace.

Nedílnou součástí automatizace je proces regulace neboli působení na řízenou soustavu za určitým cílem, přičemž je k dispozici informace o aktuálním stavu regulované veličiny.

Regulovaný systém je zpravidla možné popsat diferenciální rovnicí, jež vyjadřuje vztah mezi vstupním a výstupním signálem tohoto systému. Určování řešení diferenciálních rovnic však může být velmi náročné, jak početně, tak časově, proto je využívána Laplaceova transformace. Ta byla v 18. století zavedena Leonhardem Eulerem, běžně užívat se však začala až na počátku 19. století, kdy ji znovu odvodil francouzský matematik Pierre-Simon Laplace. Hlavní význam této integrální transformace spočívá v převodu lineárních diferenciálních rovnic na rovnice algebraické, čímž je značně usnadněno hledání jejich řešení. Vzhledem k tomu, že tento typ rovnic popisuje velké množství dějů v inženýrské praxi (např. v oblasti elektrických obvodů, kmitání, zpracování signálu), je uplatnění Laplaceovy transformace opravdu široké.

První část této bakalářské práce je zaměřena na Laplaceovu transformaci z matematického hlediska. Jsou zde uvedeny základní definice a vlastnosti, přičemž některé z nich jsou demonstrovány na příkladech. Součástí je také přehled nejčastěji užívaných funkcí a jejich obrazů (tzv. Laplaceův slovník). V této kapitole je rovněž ukázána transformace jednotkového impulsu, jednotkového skoku a způsob aplikace Laplaceovy transformace při řešení diferenciálních rovnic.

Další kapitola se zabývá využitím Laplaceovy transformace v teorii regulace. Značná část této kapitoly je věnována popisu členů či systému pomocí diferenciální rovnice a pomocí přenosu, jež lze z diferenciální rovnice odvodit s využitím Laplaceovy transformace. Je zde popsán regulační obvod, uvedeno dělení regulačních členů a jejich charakteristické přenosy. Závěr teoretické části je věnován pravidlům blokové algebry, která s využitím přenosů umožňuje řešení složitějších systémů, jež se skládají z různých spojených dílčích členů.

Praktická část této práce se zaměřuje na srovnání složitosti hledání řešení diferenciálních rovnic klasickým způsobem (řešení homogenní diferenciální rovnice a řešení nehomogenní diferenciální rovnice metodou neurčitých koeficientů) s řešením využívajícím Laplaceovu transformaci. To je ukázáno na konkrétních příkladech z teorie kmitání.

V závěrečné části práce je ukázáno řešení vybraných příkladů v programu MATLAB, který obsahuje prostředky pro práci s Laplaceovou transformací, přenosem, určením a vykreslením impulsní a přechodové funkce a řešení blokové algebry.

2 LAPLACEOVA TRANSFORMACE

Laplaceova transformace, v literatuře taktéž označována jako L-transformace, je integrální transformace, která převádí funkce reálné proměnné na funkce proměnné komplexní. Umožňuje také převod lineární obyčejné diferenciální rovnice s konstantními koeficienty na rovnici algebraickou. Ta je pro následnou manipulaci znatelně jednodušší.

V této kapitole jsou uvedeny definice a základní vlastnosti této matematické transformace. [1, 2, 3]

2.1 Podmínky $f(t)$ pro existenci obrazu

Aby bylo možné Laplaceovu transformaci provést, musí transformovaná funkce $f(t)$, jež je definována pro $\forall t \in \mathbb{R}$, splňovat následující podmínky:

- a) $f(t)$ je jednoznačná a pro $\forall t < 0$ je $f(t) = 0$.
- b) $f(t)$ je po částech spojitá na každém konečném intervalu. V bodech nespojitosti prvního druhu definujeme její hodnotu vztahem

$$f(t_0) = \frac{1}{2} [f(t_0-) + f(t_0+)], \quad (2.1)$$

kde $f(t_0-)$, resp. $f(t_0+)$ je limita dané funkce zleva, resp. zprava v bodě t_0 .

- c) $f(t)$ je exponenciálního řádu, tj. existují takové konstanty $M > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, že pro všechna $t \geq 0$ platí nerovnost

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}. \quad (2.2)$$

Číslo α pak označujeme jako exponenciální řád funkce.

Má-li daná funkce $f(t)$ tyto tři vlastnosti, nazýváme ji časovou funkcí.

Příklad 2.1: Dokažte, že funkce $f(t) = \sin t$ je exponenciálního řádu.

Dle (2.2) musí platit, že

$$|\sin t| \leq Me^{\alpha t}. \quad (2.3)$$

Zvolíme-li $M = 1$ a $\alpha = 0$, dostaneme

$$|\sin t| \leq 1, \quad (2.4)$$

což platí pro libovolné t .

Funkce $f(t) = \sin t$ je tedy funkce exponenciálního řádu $\alpha = 0$.

2.2 Definice Laplaceovy transformace

Definice: Necht' $f(t)$ je časovou funkcí. Obrazem $F(s)$ funkce $f(t)$, resp. Laplaceovou transformací funkce $f(t)$ definovanou pro $\forall s \geq \alpha$ nazveme integrál

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (2.5)$$

Pomocí tohoto integrálu přiřazujeme každé funkci $f(t)$ s množinou nezávislé proměnné t funkci $F(s)$ s množinou komplexní proměnné s . Jedná se tedy o zobrazení $\mathcal{L}: f \rightarrow F$, což zapisujeme jako

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s). \quad (2.6)$$

Funkci $F(s)$ označujeme jako obraz funkce $f(t)$, funkci $f(t)$ pak jako vzor nebo originál funkce $F(s)$.

Opačný směr přechodu, tedy od obrazu $F(s)$ ke vzoru $f(t)$, nazýváme inverzní Laplaceovou transformací a zapisujeme jako

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t). \quad (2.7)$$

Příklad 2.2: Určete Laplaceovu transformaci funkce $f(t) = at$ pro $t \geq 0$.

Zadanou časovou funkci dosadíme do definičního integrálu Laplaceovy transformace (2.5). Po provedení integrace metodou per partes získáme

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} at \cdot e^{-st} dt = \left[\begin{array}{ll} u = at & v' = e^{-st} \\ u' = a & v = -\frac{e^{-st}}{s} \end{array} \right] = \\ &= -a \left[\frac{t}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} + a \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} dt = -\frac{a}{s} [te^{-st}]_0^{\infty} - \frac{a}{s^2} [e^{-st}]_0^{\infty} = \frac{a}{s^2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

což zapisujeme jako $\mathcal{L}\{at\} = \frac{a}{s^2}$.

2.3 Zpětná Laplaceova transformace

Zpětnou neboli inverzní Laplaceovu transformaci, kdy k obrazu $F(s)$ hledáme původní funkci $f(t)$, tedy zobrazení $\mathcal{L}^{-1}: F \rightarrow f$, vyjádříme jako

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c F(s)e^{st} ds. \quad (2.9)$$

Uzavřená křivka c v sobě uzavírá všechny singulární body funkce $F(s)$.

Singulární bod funkce komplexní proměnné $F(s)$ je takový bod s_0 , v němž funkce $F(s)$ není analytická, tedy v alespoň jednom bodě jeho okolí neexistuje derivace $F'(s)$. [8]

Rozlišujeme několik druhů singulárních bodů, v rámci definování zpětné Laplaceovy transformace vystačíme s tzv. póly [4], jež jsou v s_0 definovány jako

$$\lim_{s \rightarrow s_0} F(s) = \infty. \quad (2.10)$$

Pól může být jednoduchý nebo násobnosti k .

Nyní již můžeme definovat reziduovou větu, pomocí níž můžeme vypočítat (2.9). Ta je běžně aplikována při výpočtu křivkových integrálů. Dostáváme tedy

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_c F(s) e^{st} ds = \sum_{\text{póly } F(s)} \text{Res} [F(s) e^{st}]. \quad (2.11)$$

Je-li v singulárním bodě s_0 jednoduchý pól, vypočítáme jeho reziduum jako

$$\text{Res}_{s \rightarrow s_0} [F(s) e^{st}] = \lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0) F(s) e^{st}. \quad (2.12)$$

Je-li v singulárním bodě s_0 k -násobný pól, vypočítáme jeho reziduum jako

$$\text{Res}_{s \rightarrow s_0} [F(s) e^{st}] = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} [(s - s_0)^k F(s) e^{st}]. \quad (2.13)$$

Příklad 2.3: Určete inverzní Laplaceovu transformaci funkce $F(s) = \frac{a}{s^2}$.

Zadaná funkce $F(s)$ má jeden pól $s_0 = 0$, jehož násobnost je $k = 2$. Využijeme tedy vztah (2.13), čímž získáme

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{Res}_{s \rightarrow 0} [F(s) e^{st}] = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^{(1)}}{ds^{(1)}} [(s-0)^2 F(s) e^{st}] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[s^2 \frac{a}{s^2} e^{st} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} (a e^{st}) = \lim_{s \rightarrow 0} a t e^{st} = at, \end{aligned} \quad (2.14)$$

což zapisujeme jako $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{a}{s^2} \right\} = at$.

Podíváme-li se na výše řešený příklad 2.2, v němž jsme hledali obraz právě k funkci $f(t) = at$, můžeme vidět, že jsme dospěli ke správnému výsledku.

Leží-li všechny póly vpravo od přímky $s = c$, kde $c \in \mathbb{R} \wedge c > 0$, tj. platí-li $\forall \text{Re } s > c$, je možné integrál (2.9) upravit následovně:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds. \quad (2.15)$$

Tento tvar zpětné Laplaceovy transformace nazýváme Bromwich-Wagnerův integrál. Meze tohoto integrálu značí, že integrujeme podél přímky rovnoběžné s imaginární osou ve vzdálenosti c od počátku.

Z praktického hlediska není žádný z těchto vzorců běžně využíván. Pro užití v praxi slouží tzv. slovník Laplaceovy transformace.

2.4 Slovník Laplaceovy transformace

Výpočty Laplaceova obrazu pomocí definice (2.5) bývají značně pracné – spočívají v opakovaném použití metody per partes. Aby bylo použití Laplaceovy transformace co nejjednodušší, jsou v praxi běžně užívány tzv. operátorové slovníky. V nich jsou uvedeny obrazy běžně se vyskytujících funkcí. Můžeme je využít jak pro přímou, tak pro zpětnou Laplaceovu transformaci.

Ukázka slovníku Laplaceovy transformace je v Tab. 1, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$.

$f(t), t \geq 0$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
$\delta(t)$	$1, \operatorname{Re} s > 0$
$\eta(t)$	$\frac{1}{s}, \operatorname{Re} s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}, \operatorname{Re} s > 0$
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}, \operatorname{Re} s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \operatorname{Re} s > a$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}, \operatorname{Re} s > a$
$t^k e^{at}$	$\frac{k!}{(s-a)^{k+1}}, \operatorname{Re} s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \operatorname{Re} s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \operatorname{Re} s > 0$
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \operatorname{Re} s > a$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \operatorname{Re} s > a$
$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}, \operatorname{Re} s > 0$
$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}, \operatorname{Re} s > 0$

Tab. 1: Operátorový slovník Laplaceovy transformace

2.5 Vlastnosti Laplaceovy transformace

2.5.1 Linearita transformace

Je-li časová funkce $f(t)$ dána jako součet k funkcí

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_k(t) \quad (2.16)$$

s obrazy $F_i(s)$, kde $i = 1, \dots, k$, pak je obraz funkce $F(s)$ dán součtem obrazů jednotlivých funkcí jako

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_k(s). \quad (2.17)$$

Pro obraz funkce $f(t)$ násobenou konstantou c platí, že

$$\mathcal{L}\{cf(t)\} = cF(s). \quad (2.18)$$

Obě tato tvrzení bezprostředně vyplývají z vlastností integrálů.

2.5.2 Vybraná základní pravidla

Pravidlo podobnosti: $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ pro $a > 0$ (2.19)

Pravidlo o posunutí v obraze: $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$ pro $s-a > \alpha$ (2.20)

Pravidlo o posunutí ve vzoru: $\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ (2.21)

Pravidlo o derivaci obrazu: $\mathcal{L}\{-tf(t)\} = F'(s)$ (2.22)

Pravidlo o první derivaci vzoru: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0+)$ (2.23)

Pravidlo o n -té derivaci vzoru: $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}f'(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+)$ (2.24)

Pravidlo o integrálu vzoru: $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}F(s)$ (2.25)

Pravidlo o počáteční hodnotě: $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ (2.26)

Pravidlo o konečné hodnotě: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ (2.27)

Odvození pravidla o posunutí v obraze (2.20):

$$F(s-a) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s-a)t}dt = \int_0^{\infty} e^{at}(f(t)e^{-st})dt = \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$$

Odvození pravidla o první derivaci vzoru (2.23):

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = [f(t)e^{-st}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0+)$$

Odvození pravidla o integrálu vzoru (2.25):

Položme $g(t) = \int_0^t f(u)du$. Taktéž platí, že $g(0+) = 0$ a $g'(t) = f(t)$. Pak z výše uvedeného vzorce pro první derivaci vzoru získáváme

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - f(0+) = s\mathcal{L}\{g(t)\}. \quad (2.28)$$

Pro lepší názornost byl ve (2.28) obraz funkce namísto $F(s)$ označen jako $\mathcal{L}\{g(t)\}$.

Po další úpravě získáváme výsledný vzorec

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}F(s). \quad (2.29)$$

2.5.3 Konvoluce funkcí

Pro Laplaceovu transformaci obecně neplatí, že Laplaceova transformace součinu je rovna součinu Laplaceových transformací, tedy

$$\mathcal{L}\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} \neq \mathcal{L}\{f_1(t)\} \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\}. \quad (2.30)$$

Tuto vlastnost však splňuje tzv. konvoluce funkcí, již značíme jako $(f_1 * f_2)(t)$.

Definice: Jsou-li $f_1(t), f_2(t)$ časové funkce, definujeme jejich konvoluci jako

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du. \quad (2.31)$$

Vlastnosti konvoluce:

$$\text{Komutativní zákon: } (f_1 * f_2)(t) = (f_2 * f_1)(t) \quad (2.32)$$

$$\text{Asociativní zákon: } (f_1 * f_2)(t) * f_3(t) = f_1(t) * (f_2 * f_3)(t) \quad (2.33)$$

$$\text{Borelův vzorec: } \mathcal{L}\{(f_1 * f_2)(t)\} = F_1(s)F_2(s) \text{ neboli} \quad (2.34)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\} = (f_1 * f_2)(t) \quad (2.35)$$

2.6 Odvození Laplaceova obrazu $\delta(t)$ a $\eta(t)$

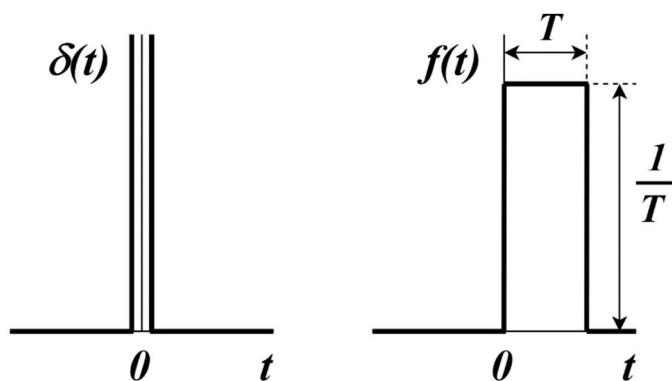
Nyní ukážeme odvození Laplaceova obrazu dvou důležitých funkcí – jednotkového (Diracova) impulsu $\delta(t)$ a jednotkového skoku (Heavisideovy funkce) $\eta(t)$. [5]

Příklad 2.4: Určete Laplaceovu transformaci funkce $\delta(t)$, jež je definována vztahy

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{pro } t = 0 \\ 0 & \text{pro } t \neq 0, \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.37)$$

Pro odvození Laplaceova obrazu nahrazujeme Diracovu impulsní funkci obdélníkem o šířce T a výšce $\frac{1}{T}$ (Obr. 1). Takovýto model splňuje (2.37), tedy že velikost plochy vymezené touto funkcí je rovna 1.



Obr. 1: Modelová funkce pro odvození Diracova impulsu

Tuto nově zavedenou modelovou funkci popíšeme jako

$$f(t) = \frac{1}{T} \cdot 1(t) - \frac{1}{T} \cdot 1(t - T). \quad (2.38)$$

Její Laplaceův obraz již dokážeme určit využitím pravidla o obrazu funkce násobené konstantou (2.18) a pravidla o posunutí ve vzoru (2.21).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{T} \cdot 1(t) - \frac{1}{T} \cdot 1(t - T)\right\} &= \frac{1}{T} \cdot \mathcal{L}\{1(t)\} - \frac{1}{T} \cdot \mathcal{L}\{1(t - T)\} = \\ &= \frac{1}{T \cdot s} - e^{-sT} \frac{1}{T \cdot s} = \frac{1 - e^{-sT}}{T \cdot s} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Obraz skutečné Diracovy funkce získáme pro případ $T \rightarrow 0$. Pro vyřešení limity využijeme l'Hospitalova pravidla.

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-sT}}{Ts} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{s \cdot e^{-sT}}{s} = 1 \quad (2.40)$$

Příklad 2.5: Určete Laplaceovu transformaci funkce $\eta(t)$, jež je definována vztahem

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases} \quad (2.41)$$

Odvození obrazu jednotkového skoku je značně jednodušší než u jednotkového impulsu. Jelikož jej na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$, na němž je Laplaceova transformace

definována, dokážeme jednoduše zintegrovat, předpis pro $\eta(t)$ pouze dosadíme do definičního vztahu (2.5) a následně upravíme.

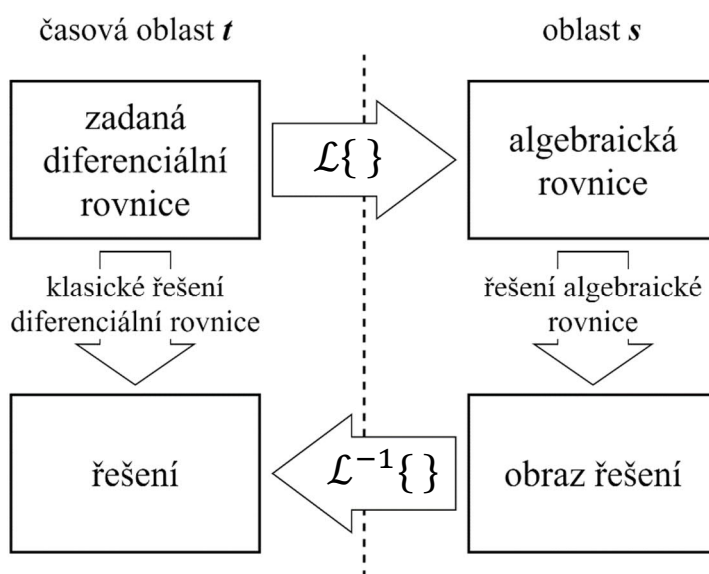
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\eta(t)\} &= \int_0^{\infty} \eta(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \\ &= -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^{\infty} = -\frac{1}{s} [0 - 1] = \frac{1}{s}\end{aligned}\quad (2.42)$$

2.7 Řešení diferenciálních rovnic

Motivací Laplaceovy transformace je převod diferenciální rovnice n -tého řádu na rovnici algebraickou, její úprava a následná zpětná transformace řešení, čímž se sníží náročnost jejího výpočtu. Pro převod $\mathcal{L}: f \rightarrow F$ využíváme větu o n -té derivaci vzoru (2.24). Pro jednoznačnost řešení je třeba, abychom znali n počátečních podmínek.

Schéma řešení diferenciálních rovnic Laplaceovou transformací je na Obr. 2.

Postup řešení diferenciálních rovnic užitím Laplaceovy transformace je demonstrován na příkladu 2.6.



Obr. 2: Schéma řešení diferenciálních rovnic

Příklad 2.6: Řešte diferenciální rovnici $y'' + 6y' + 5y = 10$ metodou Laplaceovy transformace pro počáteční podmínky $y(0) = 2$ a $y'(0) = 0$.

Obraz levé strany je roven obrazu pravé strany, tedy

$$\mathcal{L}\{y'' + 6y' + 5y\} = \mathcal{L}\{10\}. \quad (2.43)$$

Využijeme linearitu Laplaceovy transformace a pravidlo pro násobení konstantou, z čehož získáme

$$\mathcal{L}\{y''\} + 6 \cdot \mathcal{L}\{y'\} + 5 \cdot \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{10\}. \quad (2.44)$$

Zavedeme označení $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$. Dále aplikujeme pravidlo o n -té derivaci vzoru (2.24), resp. pravidlo o první derivaci vzoru (2.23). Obraz pravé strany získáme užitím vzorce z operátorového slovníku.

$$[s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)] + 6 \cdot [s \cdot Y(s) - y(0)] + 5 \cdot Y(s) = \frac{10}{s} \quad (2.45)$$

Abychom mohli provést zpětnou Laplaceovu transformaci, je potřeba z rovnice (2.45) vyjádřit $Y(s)$. Dosadíme také počáteční podmínky a dostaneme

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 12s + 10}{s \cdot (s^2 + 6s + 5)} = \frac{2}{s}. \quad (2.46)$$

Zpětnou Laplaceovou transformací pak získáváme řešení

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\} = 2. \quad (2.47)$$

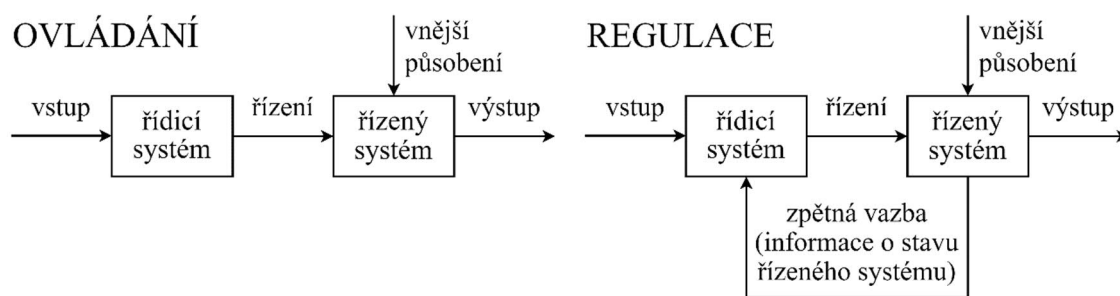
3 VYUŽITÍ LAPLACEOVY TRANSFORMACE V TEORII REGULACE

Jedním z cílů člověka v moderní společnosti je zvýšení produktivity a ulehčení fyzické nebo též nebezpečné či jednotvárné a mentálně unavující činnosti. Takové úkony jsou proto přenechávány strojům, počítačům či prvkům umělé inteligence. Tento proces nazýváme automatizace.

Základem automatizace je řízení neboli cílené působení na řízený objekt tak, aby se dosáhlo určitého předepsaného cíle. Řízení můžeme dělit na ruční (např. člověk řídící letadlo) a automatické (např. autopilot). U automatického řízení rozlišujeme řízení přímé, jež probíhá bez přívodu energie, a nepřímé, jež probíhá s přívodem energie. [2]

Řízení můžeme taktéž rozlišit podle toho, zda je výsledek řízení zpětně kontrolován či nikoli. V případě řízení bez zpětné vazby říkáme, že se jedná o ovládání. Je-li výsledek kontrolován zpětnou vazbou, mluvíme o regulaci. Vyšší formy řízení zahrnují optimální řízení, adaptivní řízení, učení a umělou inteligenci. [2]

Schéma ovládání a regulace je zakresleno na Obr. 3.



Obr. 3: Schéma ovládání a regulace

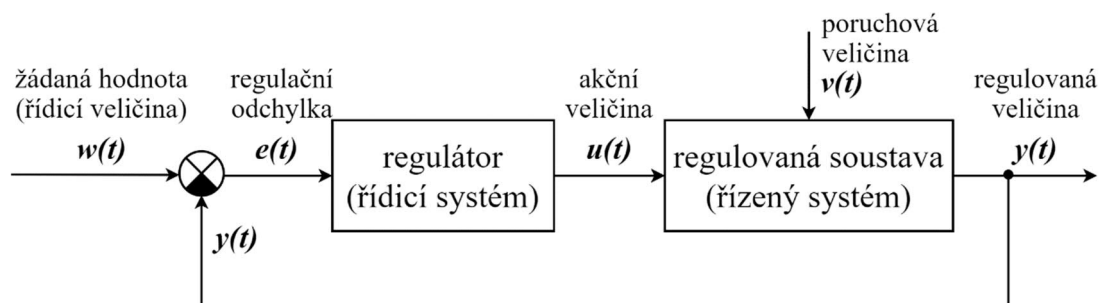
Automatické řízení lze provést několika způsoby, které závisí na principu působení řídicího systému na řízený systém. Jsou-li k řízení využívány dvouhodnotové veličiny (formálně vyjadřovány hodnotami 0 a 1, např. vypnutý a sepnutý spínač), mluvíme o logickém řízení. Vztah mezi vstupní a výstupní proměnnou nazýváme logickou funkcí a obvod pracující na tomto principu logickým obvodem. V případě, že systém nevystačí pouze s dvouhodnotovými vstupy a výstupy, uplatňujeme řízení spojitě či diskrétní. U spojitého řízení jsou jak akční zásah, tak údaje o řízeném systému veličinami spojitě proměnnými v čase a je vytvořena nepřetržitá vazba mezi vstupy a výstupy. Oproti tomu diskrétní řízení pracuje s posloupnostmi impulsů, které jsou definovány v časovém sledu daném tzv. vzorkovací periodou. Je-li vzorkovací perioda velmi krátká, může být diskrétní řízení dobrou aproximací řízení spojitěho. [2]

V rámci této práce se zaměříme na spojitě automatické řízení.

3.1 Regulační obvod

Jako regulační obvod nazveme obvod, v němž se uskutečňuje řízení se zpětnou vazbou neboli regulace. V tomto obvodu rozlišujeme dvě hlavní části – regulátor (řídící systém) a regulovanou soustavu (řízený systém).

Jelikož jsou regulátor i soustava obvykle složeny z několika složitých jednotek (měřicí přístroje, zesilovače, aj.), zobrazujeme je zjednodušeně v blokovém schématu (Obr. 4). V něm jsou jednotlivé členy obvodu či celé skupiny znázorněny obdélníky, přičemž vztahy mezi nimi jsou zaznačeny spojovacími čarami s šipkami, které udávají směr působení (šíření signálu). Na místa sčítání signálů umísťujeme tzv. součtové (resp. rozdílové) členy, jež ve schématu znázorňujeme kroužky s křížem. Je-li v daném místě signál přičítán, je část kroužku nevyplněna, je-li odečítán, je segment vyplněn černou barvou. Místo odbočení, popřípadě rozdvojení signálu označujeme tečkou. Signál v tomto místě zůstává stejný, na obou větvích je tedy stejná hodnota informace. [2, 6]



Obr. 4: Blokové schéma regulačního obvodu

Výstupem regulované soustavy je regulovaná veličina, již označujeme písmenem y . Je to právě tato veličina, kterou se regulací snažíme udržet na požadované hodnotě. Požadovaná hodnota je udávána žádanou hodnotou, někdy taktéž nazývána řídicí veličinou w . Pro potřebu regulace je nutno nepřetržitě sledovat rozdíl mezi žádanou a regulovanou veličinou. Tuto hodnotu vyjadřuje regulační odchylka e určená vztahem

$$e = w - y. \quad (3.1)$$

Určení regulační odchylky e se provádí v rozdílovém členu. Nabude-li e nenulové hodnoty (tedy hodnota regulované veličiny se liší od hodnoty řídicí veličiny), provede regulátor akční zásah. Ten je uskutečněn výstupní veličinou regulátoru, tzv. akční veličinou u . Cílem regulátoru je minimalizace hodnoty regulační odchylky. [2, 6]

Příčinou vzniklého rozdílu mezi žádanou a regulovanou veličinou a hlavním důvodem pro zavádění automatické regulace jsou poruchové veličiny v , které nežádoucím způsobem ovlivňují regulovanou soustavu. Na soustavu může působit více poruchových veličin najednou – v takovém případě je označujeme v_1, v_2 atd. [6]

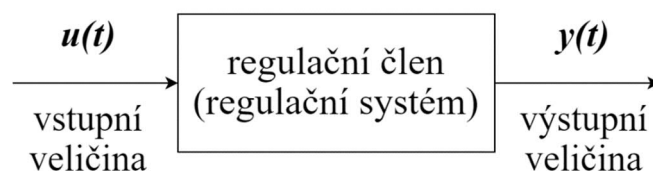
V rámci spojitého řízení jsou všechny charakteristické veličiny spojitě proměnné v čase; pracujeme tedy s časovými průběhy $y(t), w(t), u(t), v(t)$. [2]

3.2 Vlastnosti regulačního členu

Člen či systém v automatickém řízení je charakterizován vztahem mezi vstupní a výstupní veličinou. Jeho vlastnosti můžeme posuzovat ve stavu ustáleném, v takovém případě hovoříme o statických vlastnostech, nebo ve stavu, kdy se vstupní a v závislosti na tom výstupní veličiny mění, pak mluvíme o dynamických vlastnostech. V rámci regulace nás zajímají vlastnosti regulačního členu v přechodovém stavu, proto se dále budeme zabývat pouze jeho dynamickými vlastnostmi. Ty můžeme popsat dvěma odlišnými způsoby – vnějším a vnitřním popisem.

Jelikož nás v rámci této práce nebude zajímat konstrukce systému ani děje probíhající uvnitř něj, zaměříme se na vnější popis, který o systému uvažuje jako o „černé skříňce“ a který jeho vlastnosti popisuje pouze jako závislost vstupu a výstupu. [2]

Schéma takového obecného členu, resp. systému můžeme vidět na Obr. 5.



Obr. 5: Blokové schéma regulačního členu, resp. systému

3.3 Diferenciální rovnice systému

Lineární spojitý regulační člen, resp. systém dle Obr. 5 můžeme obecně popsat lineární diferenciální rovnicí

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \\ = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde a_i, b_j jsou konstantní koeficienty, přičemž $i = 1 \dots n, j = 1 \dots m$. Pro to, aby bylo možné daný systém reálně uskutečnit, musí být vždy splněna podmínka fyzikální realizovatelnosti. Ta říká, že řád nejvyšší derivace výstupní veličiny $y(t)$ musí být vždy větší nebo roven nejvyššímu řádu derivace vstupní veličiny $u(t)$. To zapíšeme jako

$$n \geq m. \quad (3.3)$$

Řád nejvyšší derivace výstupní veličiny y udává řád systému. [2]

Řešení rovnice (3.2) nám umožňuje určit průběh výstupní veličiny $y(t)$. Je dáno součtem homogenního a partikulárního řešení:

$$y(t) = y_{hom}(t) + y_{part}(t). \quad (3.4)$$

Homogenní řešení, tedy řešení rovnice (3.2) bez pravé strany, určuje chování systému poté, co byla soustava vyvedena z rovnovážného stavu a ponechána bez účinku vnějších veličin. Vliv vstupních veličin je zahrnut v řešení partikulárním. Abychom mohli provést řešení diferenciální rovnice, je nutné znát průběh vstupní funkce, její počáteční podmínky

a také počáteční podmínky $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$, celkem tedy n -počátečních podmínek výstupní funkce. [2]

Klasické řešení diferenciální rovnice může být velmi náročné a zdoluhavé, proto pro její řešení využíváme Laplaceovy transformace, kterou jsme definovali v předchozí kapitole.

3.4 Přenos systému

Nejčastěji používaným způsobem popisu lineárního regulačního členu, resp. systému je přenos. Ten je roven podílu Laplaceova obrazu výstupní veličiny a Laplaceova obrazu vstupní veličiny při nulových počátečních podmínkách. [2]

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (3.5)$$

Je-li dána vstupní veličina $u(t)$, resp. její obraz $U(s)$ můžeme z přenosu $G(s)$ určit obraz výstupní funkce $Y(s)$ jako

$$Y(s) = U(s) \cdot G(s). \quad (3.6)$$

Zpětnou Laplaceovou transformací poté dostaneme originál odezvy

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s) \cdot G(s)\}. \quad (3.7)$$

Vyjdeme-li z popisu systému daného diferenciální rovnicí (3.2) a určíme-li její Laplaceův obraz, získáme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t)\} = \\ = \mathcal{L}\{b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t)\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dále využijeme linearitu transformace (2.17) a větu o n -té derivaci vzoru (2.24), ve které všechny počáteční podmínky vstupní i výstupní funkce položíme rovny 0 (jelikož přenos je definován jako podíl obrazu výstupní a vstupní veličiny při nulových počátečních podmínkách). [2]

$$\begin{aligned} a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = \\ = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Vytkneme na obou stranách obrazy funkcí

$$\begin{aligned} Y(s) \cdot [a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] = \\ = U(s) \cdot [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0], \end{aligned} \quad (3.10)$$

vyjádříme $Y(s)$ nebo $U(s)$ a dosadíme do (3.5), čímž získáme vzorec pro výpočet přenosu z diferenciální rovnice.

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.11)$$

Jelikož pro diferenciální rovnici platí podmínka fyzikální realizovatelnosti (3.3), můžeme říct, že stupeň polynomu v čitateli je menší nebo roven stupni polynomu ve jmenovateli přenosu daného (3.11). [2]

Kromě tvaru (3.11) můžeme přenos vyjádřit ještě dalšími dvěma používanými způsoby – pomocí pólů a nul a pomocí časových konstant.

Přenos s vyjádřenými póly a nulami získáme z (3.11) rozložením polynomu v čitateli i jmenovateli na součin kořenových činitelů do podoby

$$G(s) = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{(s - n_1)(s - n_2) \dots (s - n_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \quad (3.12)$$

kde n_i nazýváme nulami přenosu a p_i póly přenosu. Mohou nabývat jak reálných, komplexně sdružených, tak i čistě imaginárních hodnot. Jejich rozložení v komplexní rovině rozhoduje o vlastnostech zkoumaného systému. [2]

Přenos s časovými konstantami vychází z vyjádření s póly a nulami, jelikož časové konstanty mající rozměr času definujeme vztahy

$$\tau_i = -\frac{1}{n_i}, \quad T_i = -\frac{1}{p_i}. \quad (3.13)$$

Přenos pak zapíšeme jako

$$G(s) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots (\tau_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_n s + 1)}. \quad (3.14)$$

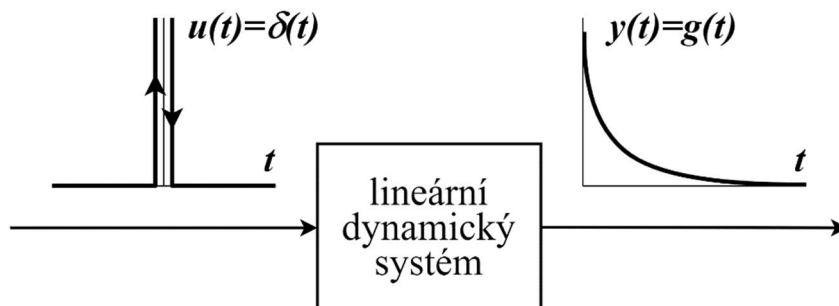
Přenos je pro každý systém jednoznačný. Členy s totožným přenosem reagují na stejný vstup identicky bez ohledu na jejich konstrukční provedení. [2, 6]

3.5 Impulsní funkce

Pojmem impulsní funkce $g(t)$ označujeme odezvu systému na jednotkový neboli Diracův impuls $\delta(t)$ při nulových počátečních podmínkách. Funkci $\delta(t)$ jsme definovali v předchozí kapitole, kde jsme také odvodili její Laplaceův obraz. Připomeňme, že

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1. \quad (3.15)$$

Grafickým znázorněním impulsní funkce je impulsní charakteristika (Obr. 6). [2]



Obr. 6: Odezva systému na jednotkový impuls (impulsní charakteristika)

Pro určení odezvy na takto definovanou vstupní funkci využijeme (3.5) a dosadíme do něj obraz funkce $\delta(t)$ dle (3.15) [2], čímž získáme

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{g(t)\}}{\mathcal{L}\{\delta(t)\}} = \mathcal{L}\{g(t)\}. \quad (3.16)$$

Odtud již jednoduše můžeme vyjádřit impulsní funkci jako inverzní transformaci přenosu systému

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}. \quad (3.17)$$

Vidíme, že vztah mezi impulsní funkcí $g(t)$ a přenosem $G(s)$ je shodný se vztahem mezi vzorem a obrazem v Laplaceově transformaci. Z toho též vyplývá označení impulsní funkce písmenem g . [2]

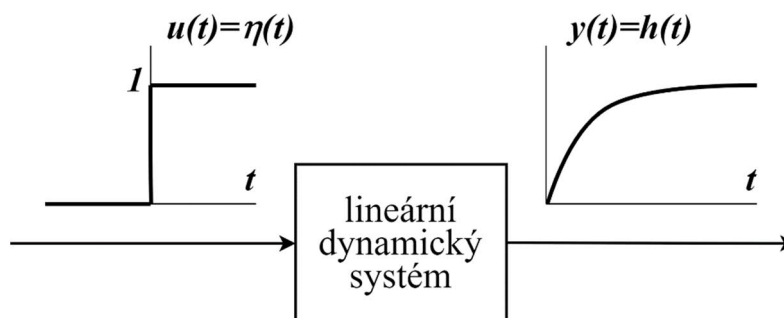
Tato funkce je ve skutečnosti nerealizovatelná, v praxi je možné uskutečnit pouze konečně krátké impulsy s konečně velkou amplitudou. Jedná se např. o velmi krátký impulz velkého napětí či o velmi krátký úder velké síly. [2]

3.6 Přechodová funkce

Jako přechodovou funkci $h(t)$ označujeme odezvu systému na jednotkový skok $\eta(t)$. Tuto funkci jsme taktéž definovali v předchozí kapitole a odvodili jsme její Laplaceův obraz jako

$$\mathcal{L}\{\eta(t)\} = \frac{1}{s}. \quad (3.18)$$

Grafickým znázorněním přechodové funkce je přechodová charakteristika (Obr. 7). [2]



Obr. 7: Odezva systému na jednotkový skok (přechodová charakteristika)

Pro určení odezvy na takto definovanou funkci opět využijeme (3.5) a dosadíme obraz funkce $\eta(t)$ dle (3.18), čímž získáme

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{h(t)\}}{\mathcal{L}\{\eta(t)\}} = s \cdot \mathcal{L}\{h(t)\} \Rightarrow \frac{1}{s} \cdot G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}. \quad (3.19)$$

Odtud již můžeme jednoduše vyjádřit přechodovou funkci

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot G(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}. \quad (3.20)$$

Jak již můžeme vidět ve (3.20), existuje vztah mezi obrazem impulsní funkce $G(s)$ a přechodové funkce $H(s)$:

$$H(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s) \Leftrightarrow G(s) = s \cdot H(s). \quad (3.21)$$

Vztah existuje i mezi vzory těchto funkcí a je vyjádřen jako

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \Leftrightarrow g(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (3.22)$$

přičemž převod z $h(t)$ na $g(t)$ dle (3.22) platí pouze za splnění silné fyzikální realizovatelnosti, tedy (3.3) s ostrou nerovností. [2]

Oproti jednotkovému impulsu je jednotkový skok snadno realizovatelný – jedná se o změnu, která se odehrává podstatně rychleji, než je systém schopen na ni reagovat, např. skoková změna přiváděné energie, změna zatížení motoru přes spojku či rychlé přemístění teplotní sondy ze studené do teplé vody. [2]

Přechodovou funkci a přechodovou charakteristiku lze určit experimentálně, čehož využíváme k identifikaci systémů, jejichž dynamické vlastnosti dobře neznáme. Je třeba si však uvědomit, že v některých případech na výstupu nezískáváme odezvu na jednotkový skok, nýbrž na nějaký násobek jednotkového skoku, např. v případě přesunu teplotní sondy mezi kapalinami s rozdílem teplot 50 °C. Jelikož se jedná o lineární člen, pro určení skutečné přechodové charakteristiky, tedy odezvy na změnu o velikosti 1 °C, bychom v takovém případě naměřené hodnoty pouze vydělili 50. [2]

3.7 Regulační členy

Po přivedení jednotkového skoku na vstup regulačního členu se přechodová charakteristika v čase $t \rightarrow \infty$ ustálí na určité hodnotě $h(\infty)$. Tuto hodnotu můžeme určit pomocí pravidla o konečné hodnotě funkce (2.27) a vztahu mezi obrazy přechodové a impulsní funkce (3.21).

$$h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (3.23)$$

Dosadíme-li do (3.23) přenos vyjádřený diferenciální rovnicí dle (3.11), získáme

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b_0}{a_0}. \quad (3.24)$$

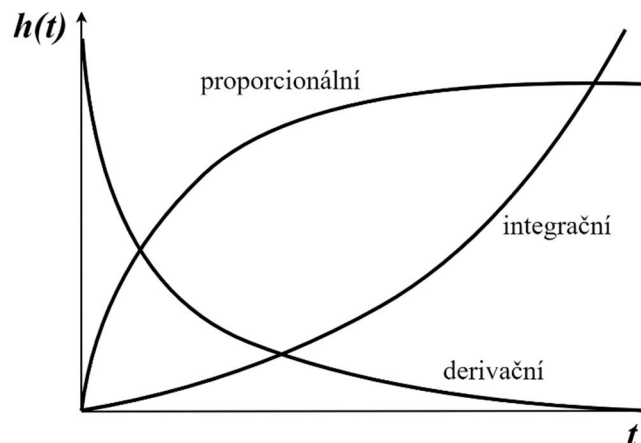
Podle toho, jakých hodnot nabývají konstanty a_0, b_0 rozlišujeme tři základní druhy regulačních členů – proporcionální, derivační a integrační. [3, 7]

U proporcionálního regulačního členu platí, že $a_0 \neq 0$ a $b_0 \neq 0$, $h(t)$ se tedy ustálí na konečné nenulové hodnotě. [3, 7]

V případě, že $a_0 \neq 0$, ale $b_0 = 0$, mluvíme o derivačním regulačním členu; $h(t)$ se opět ustálí na konečné hodnotě, na rozdíl od proporcionálního členu je však tato hodnota nulová. [3, 7]

Poslední skupinou jsou integrační regulační členy, jejichž přechodová funkce $h(t)$ se neustálí na konečné hodnotě a roste do nekonečna. Koeficienty takového členu jsou $a_0 = 0$, $b_0 \neq 0$. [3, 7]

Na Obr. 8 můžeme vidět ukázkou přechodových charakteristik jednotlivých druhů regulačních členů.



Obr. 8: Přechodové charakteristiky různých druhů regulačních členů

Nyní se podíváme na další rozdělení těchto skupin regulačních členů a jejich charakteristické přenosy.

3.7.1 Proporcionální regulační členy

Přenos proporcionálního regulačního členu odvozený z diferenciální rovnice se vyznačuje tím, že v čitateli ani ve jmenovateli nemůžeme vytknout komplexní proměnnou s . [2]

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.25)$$

Nejvyšší mocnina komplexní proměnné s ve jmenovateli, tedy n , určuje řád setrvačnosti členu. [2]

Nejjednodušším typem proporcionálního členu je člen bez setrvačnosti neboli člen se setrvačností 0. řádu. Též jej můžeme nazývat ideální proporcionální člen. Jeho přenos zapisujeme jako

$$G(s) = \frac{b_0}{a_0} = k, \quad (3.26)$$

kde k je koeficient přenosu. Dle velikosti tohoto koeficientu rozlišujeme, zda se jedná o zesílení (pro $|k| > 1$) či o zeslabení (pro $|k| < 1$). Takovýto člen je slabě fyzikálně realizovatelný. [7]

Přenos proporcionálního členu se setrvačností 1. řádu, resp. 2. řádu obecně zapíšeme jako

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1}, \quad (3.27)$$

$$G(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}, \quad (3.28)$$

kde T je časová konstanta s časovým fyzikálním rozměrem. Konstanta ξ v přenosu členu se setrvačností 2. řádu (3.28) vztahu označuje relativní tlumení. Na základě její hodnoty rozlišujeme [3,7]:

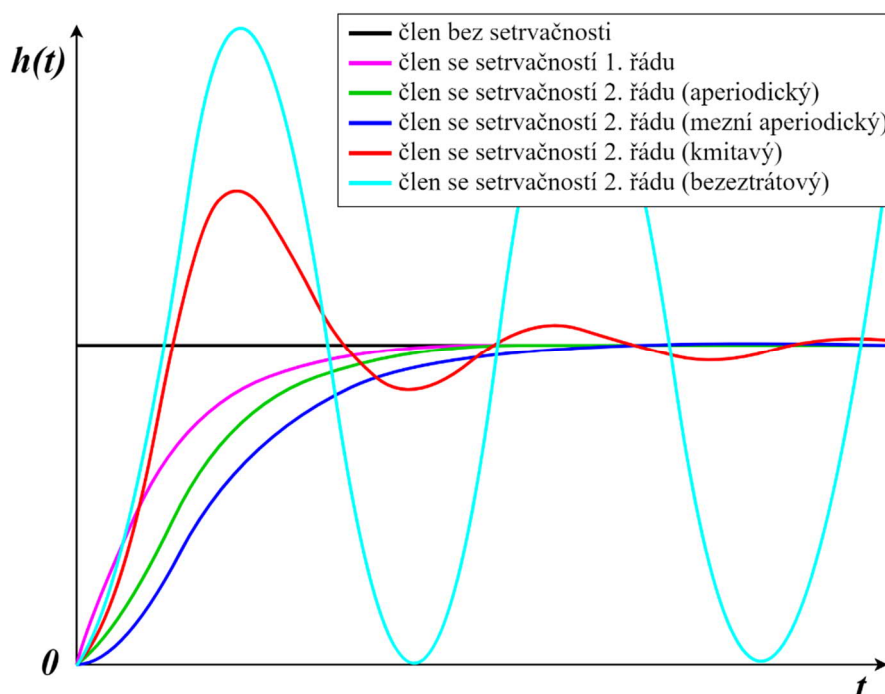
aperiodický člen	$\xi > 1$	$G(s) = \frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	(3.29)
------------------	-----------	---	--------

mezní aperiodický člen	$\xi = 1$	$G(s) = \frac{k}{(Ts + 1)^2}$	(3.30)
------------------------	-----------	-------------------------------	--------

kmitavý člen	$0 < \xi < 1$	$G(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$	(3.31)
--------------	---------------	---	--------

konzervativní (bezeztrátový) člen	$\xi = 0$	$G(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 1}$	(3.32)
--------------------------------------	-----------	-------------------------------	--------

Ukázku přechodových charakteristik jednotlivých typů proporcionálních členů můžeme vidět na Obr. 9. Jak již bylo řečeno výše, hodnota přechodové funkce se v čase $t \rightarrow \infty$ ustálí na nenulové hodnotě odpovídající podílu konstant b_0 a a_0 . [3, 7]



Obr. 9: Přechodové charakteristiky vybraných typů proporcionálních členů

3.7.2 Derivační regulační členy

V čitateli přenosu derivačního regulačního členu můžeme vytknout komplexní proměnnou s .

$$G(s) = \frac{s^r (b_m s^{m-r} + b_{m-1} s^{m-r-1} + \dots + b_r)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.33)$$

Vytkneme-li v čitateli s^r , kde $r > 0$, hovoříme o členu r -tého řádu. Stejně jako u proporcionálních členů označuje nejvyšší mocnina komplexní proměnné s ve jmenovateli řád setrvačnosti členu. [3, 7]

Přenos ideálního derivačního členu neboli derivačního členu bez setrvačnosti zapíšeme jako

$$G(s) = ks. \quad (3.34)$$

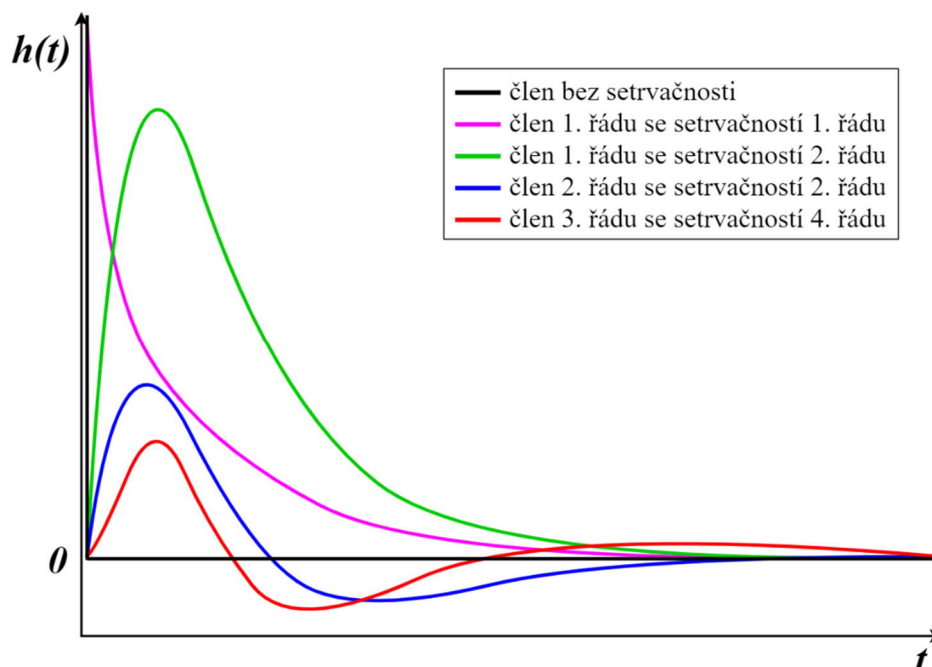
Spočítáme-li pro tento přenos přechodovou funkci dle (3.20), zjistíme, že odpovídá Diracovu impulsu násobeného konstantou k . Ideální derivační člen je fyzikálně nerealizovatelný. [3, 7]

Derivační člen se setrvačností 1. řádu (reálný derivační člen) s přenosem

$$G(s) = \frac{ks}{Ts + 1} \quad (3.35)$$

je jen slabě fyzikálně realizovatelný ($n = m$). [7]

Na Obr. 10 můžeme vidět ukázkou přechodových charakteristik vybraných derivačních členů různých řádů a setrvačností. Hodnota $h(t) \rightarrow \infty$ se ustálí na 0. [3, 7]



Obr. 10: Přechodové charakteristiky vybraných typů derivačních členů

3.7.3 Integrační regulační členy

Ve jmenovateli přenosu integračního regulačního členu jsme schopni vytknout komplexní proměnnou s .

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_r}{s^r (a_n s^{n-r} + a_{n-1} s^{n-r-1} + \dots + a_1 s + a_0)} \quad (3.36)$$

Mocnina u vytknuté proměnné určuje řád členu. Nejvyšší mocnina proměnné s polynomu, který ve jmenovateli zbude po vytknutí, udává setrvačnost členu. Přenos (3.36) tedy popisuje integrační člen r -tého řádu se setrvačností $(n - r)$ -tého řádu. [3, 7]

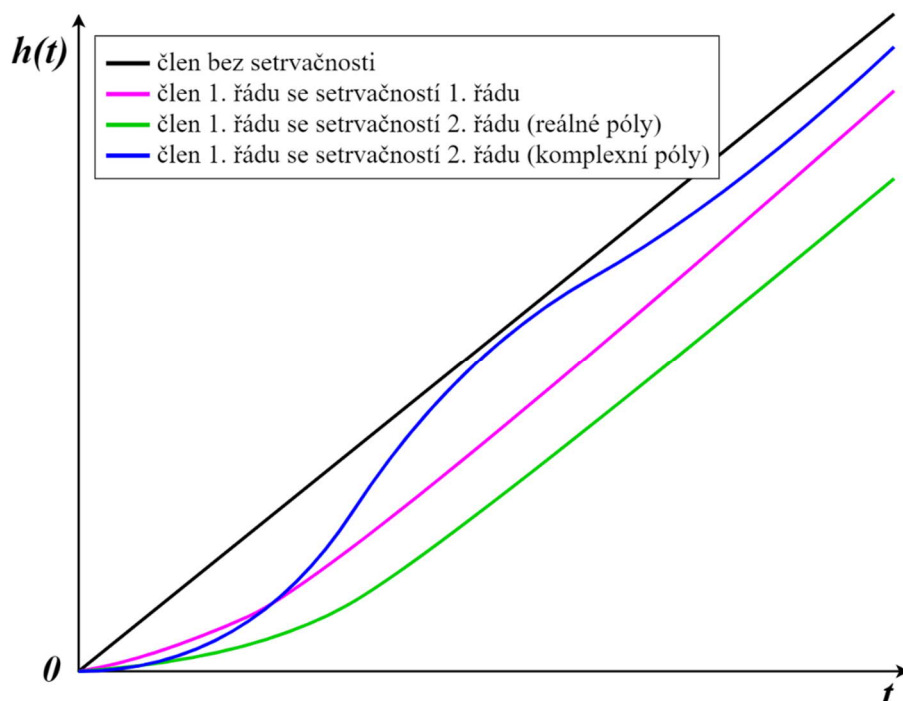
Ideální integrační člen (člen bez setrvačnosti) je silně fyzikálně realizovatelný a jeho přenos můžeme zapsat jako

$$G(s) = \frac{k}{s}. \quad (3.37)$$

Rovněž silně fyzikálně realizovatelný je i integrační člen se setrvačností 1. řádu neboli reálný integrační člen s přenosem

$$G(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)}. \quad (3.38)$$

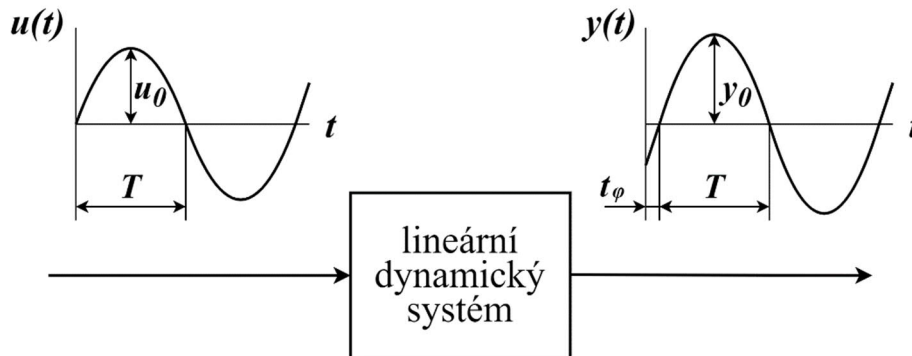
Na Obr. 11 můžeme vidět ukázkou průběhů přechodových charakteristik vybraných integračních členů. Hodnota $h(t) \rightarrow \infty$ se neustálí a roste do nekonečna. V praxi je růst $h(t)$ omezen pouze fyzikálně. [3, 7]



Obr. 11: Přechodové charakteristiky vybraných typů integračních členů

3.8 Frekvenční přenos a charakteristika

Přivedeme-li na vstup systému harmonický signál, získáme na výstupu opět signál se sinusovým průběhem, viz Obr. 12.



Obr. 12: Odezva systému na vstup se sinusovým průběhem

Vstupní a výstupní veličinu můžeme popsat jako

$$u(t) = u_0 \sin \omega t, \quad y(t) = y_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.39)$$

nebo také v komplexním tvaru

$$u(t) = u_0 e^{j\omega t}, \quad y(t) = y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}, \quad (3.40)$$

kde u_0 a y_0 jsou amplitudy vstupní a výstupní funkce, ω je úhlová frekvence, φ je fázový posun a j je imaginární jednotka. Vstupní a výstupní signál mají stejnou úhlovou frekvenci, ale různou amplitudu a jsou vůči sobě fázově posunuté o φ , kde $\varphi = \omega t_\varphi$. [2]

Pomocí takto definovaných vektorů lze frekvenční přenos vyjádřit jako

$$G(j\omega) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{u_0 e^{j\omega t}} = \frac{y_0}{u_0} e^{j\varphi} = A e^{j\varphi}. \quad (3.41)$$

Podíl $\frac{y_0}{u_0}$ zde vyjadřuje poměr amplitud výstupního a vstupního signálu. Může být taktéž označován jako A a nazýván modul přenosu či zesílení. [2]

Formálně převedeme obrazový přenos na frekvenční záměnou komplexní proměnné s za výraz $j\omega$. [2]

$$G(j\omega) = G(s) \big|_{\text{pro } s=j\omega} \quad (3.42)$$

Takovýmto nahrazením získáme frekvenční přenos ve tvaru

$$G(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0}. \quad (3.43)$$

Frekvenční přenos můžeme taktéž definovat pomocí Fourierovy transformace, která umožňuje obecnější předpis, než je (3.43), jelikož nutně neuvažuje funkci se sinusovým průběhem signálu. [2] Fourierovou transformací se však v rámci této práce zabývat nebudeme.

Frekvenční přenos na intervalu $\omega \in \langle 0; \infty \rangle$ můžeme znázornit v komplexní rovině. Takovéto zobrazení nazýváme amplitudo-fázová frekvenční charakteristika.

Hlavní význam frekvenční charakteristiky spočívá v jejím experimentálním určení, díky čemuž je možné identifikovat daný lineární dynamický člen nebo systém. [3, 7]

3.9 Dopravní zpoždění

U některých regulovaných soustav se můžeme setkat s dopravním zpožděním T_D . Tato doba, která může nabývat i hodnot v desítkách minut, způsobuje zpožděnou reakci výstupní veličiny $y(t)$ na vstupní veličinu $u(t)$. Má tedy negativní vliv na regulaci. [2]

Zda dopravní zpoždění zanedbáme či ne závisí na relaci mezi jeho hodnotou a hodnotou časových konstant regulované soustavy – je-li T_D řádově menší než časové konstanty, je možné jeho vliv opomenout. [2]

Dopravní zpoždění vzniká u soustav, v nichž je nějakým způsobem zařazena doprava – např. pec s pásem dopravujícím palivo nebo dávkování chemie do vody, kdy místo měření je v určité vzdálenosti od místa dávkování. [2]

Pro systém s T_D nemůže platit diferenciální rovnice dle (3.2) ani přenos dle (3.11). Aby diferenciální rovnice zahrnovala vliv dopravního zpoždění, musíme ji napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \\ = b_m u^{(m)}(t - T_D) + \dots + b_1 u'(t - T_D) + b_0 u(t - T_D). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Odvození přenosu systému bude stejné jako v kapitole 3.4, pro určení obrazu pravé strany rovnice však využijeme pravidlo o posunutí ve vzoru dle (2.21). Přenos systému s dopravním zpožděním, jež je vyjádřen z diferenciální rovnice (3.44), poté bude ve tvaru

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \cdot e^{-T_D s}, \quad (3.45)$$

je tedy roven přenosu systému bez dopravního zpoždění vynásobeného $e^{-T_D s}$. [2]

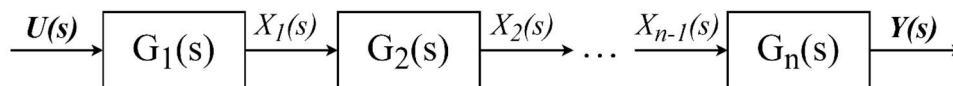
3.10 Bloková algebra

Na začátku 3. kapitoly jsme hovořili o zjednodušeném zakreslování regulačního obvodu do blokového schématu (viz Obr. 4). Takový způsob zobrazování není omezen pouze na tento typ obvodu, využíváme jej i pro vyjádření vazeb mezi členy složitějších lineárních systémů, jejichž jednotlivé členy jsou jednoznačně určeny svými přenosy $G(s)$ popisující vztah mezi vstupní a výstupní veličinou členu. [3, 7]

Pravidla, jež platí pro zakreslování blokových schémat, byla již blíže uvedena v kapitole 3.1.

Při určování celkového přenosu systému využíváme blokové algebry, která blokové schéma systému „rozkládá“ na dílčí zapojení s dílčími přenosy. Rozlišujeme tři základní zapojení – sériové, paralelní a antiparalelní neboli zpětnovazební. [3, 7]

3.10.1 Sériové zapojení



Obr. 13: Sériové zapojení

U sériového zapojení (Obr. 13) platí, že výstupní veličina předchozího členu je zároveň vstupní veličinou členu následujícího. Toho využijeme při odvození výpočtu přenosu takového zapojení. [2]

Uvažujme sériové zapojení dvou členů. Vstupní veličinu prvního členu zapojení označme $U(s)$ a výstupní veličinu téhož členu $X_1(s)$. $X_1(s)$ je zároveň vstupní veličinou druhého členu tohoto zapojení. Výstupní veličinu druhého členu označme $Y(s)$. Přenos jednotlivých členů pak můžeme na základě (3.5) vyjádřit jako

$$G_1(s) = \frac{X_1(s)}{U(s)}, \quad G_2(s) = \frac{Y(s)}{X_1(s)}. \quad (3.46)$$

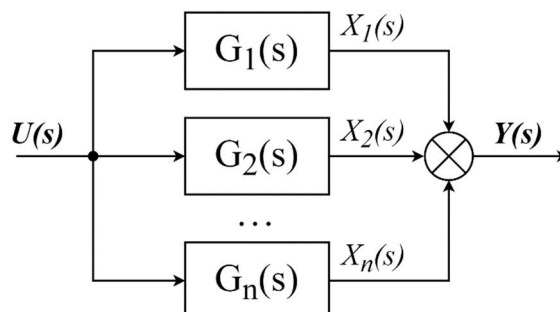
Celkový přenos zapojení $G(s)$ získáme dosazením do (3.5) a následnou úpravou jako

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{X_1(s) \cdot G_2(s)}{\frac{X_1(s)}{G_1(s)}} = G_1(s) \cdot G_2(s). \quad (3.47)$$

Obdobně tomu bude i u zapojení s více členy. Můžeme tedy říct, že celkový přenos sériového zapojení je roven součinu přenosů jednotlivých členů. [3, 7]

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot \dots \cdot G_n(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s) \quad (3.48)$$

3.10.2 Paralelní zapojení



Obr. 14: Paralelní zapojení

U paralelního zapojení (Obr. 14) je vstupem všech členů stejná veličina $U(s)$, jejich výstupní veličiny se však liší. Ty jsou následně sčítány v součtovém členu, přičemž jejich výsledkem je $Y(s)$. [2]

Opět uvažujeme zapojení dvou členů. Označíme-li výstupní veličiny jednotlivých členů $X_1(s), X_2(s)$, pak jsou jejich přenosy definovány jako

$$G_1(s) = \frac{X_1(s)}{U(s)}, \quad G_2(s) = \frac{X_2(s)}{U(s)}. \quad (3.49)$$

Následně napíšeme rovnici pro součtový člen, dosadíme dle (3.49) a upravíme:

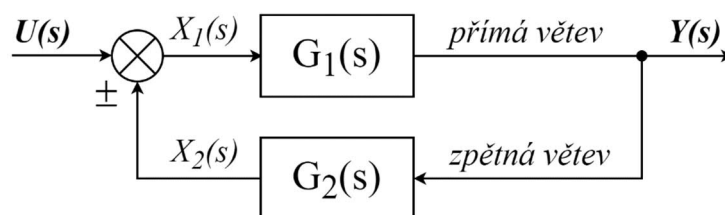
$$\begin{aligned} Y(s) &= X_1(s) + X_2(s) = G_1(s) \cdot U(s) + G_2(s) \cdot U(s) = \\ &= U(s) \cdot (G_1(s) + G_2(s)) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Obdobně to bude i u zapojení s více členy. Můžeme tedy říct, že celkový přenos paralelního zapojení je roven součtu přenosů jednotlivých členů. [3, 7]

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + \dots + G_n(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s) \quad (3.51)$$

Pokud by byl některý ze signálů odečítán (ve schématu by byl segment u dané šipky vyplněn), pouze bychom změnili znaménko před daným přenosem z plus na mínus. [2]

3.10.3 Antiparalelní (zpětnovazební) zapojení



Obr. 15: Antiparalelní (zpětnovazební) zapojení

Antiparalelní neboli zpětnovazební zapojení (Obr. 15) je takové zapojení, v němž vstupní veličinou druhého členu je výstupní veličina členu prvního a výstupní veličina druhého členu je přiváděna na součtový, resp. rozdílový člen, kde se sčítá, resp. odečítá se vstupní veličinou systému. [3, 7]

Označíme-li vstupní veličinu prvního členu $X_1(s)$ a výstupní veličinu druhého členu $X_2(s)$, můžeme pak přenosy jednotlivých členů zapsat jako

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{X_1(s)}, \quad G_2(s) = \frac{X_2(s)}{Y(s)}. \quad (3.52)$$

Rovnice pro součtový, resp. rozdílový člen poté bude ve tvaru

$$\begin{aligned} X_1(s) &= U(s) \pm X_2(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{G_1(s)} = U(s) \pm Y(s) \cdot G_2(s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{1}{G_1(s)} \mp G_2(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s) \cdot G_2(s)}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

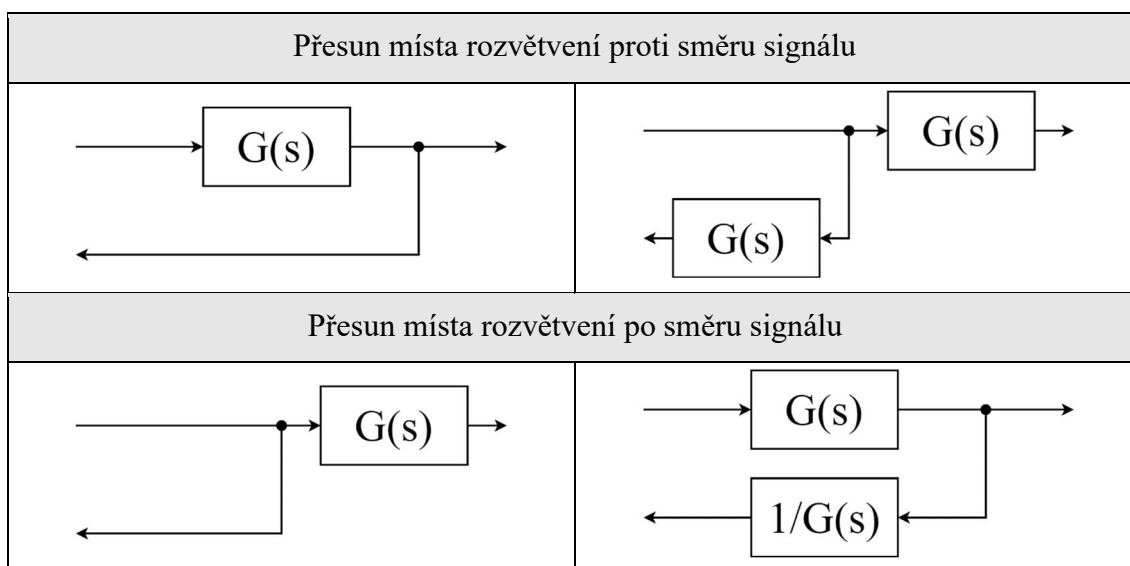
Výsledný přenos antiparalelního zapojení je tedy zlomek, v jehož čitateli je přenos členu na přímé větvi a ve jmenovateli je součet jedničky a součinu přenosů členů na přímé a

zpětné větvi. Toto platí v případě, že je v systému rozdílový člen (segment kruhu je vyplněn). V opačném případě by ve jmenovateli byl rozdíl. [3, 7]

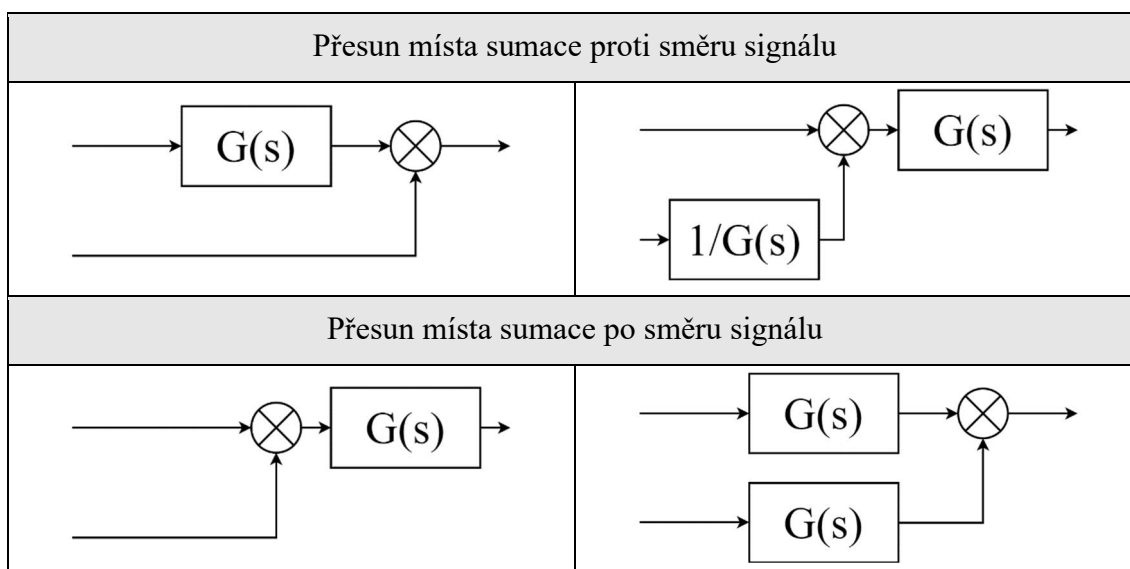
Pokud by na některé z větví nebyl umístěn žádný člen, její přenos bychom uvažovali roven 1. [3, 7]

3.10.4 Řešení překřížených vazeb

Pomocí těchto tří zapojení jsme schopni řešit i velmi složité systémy. V některých případech je však třeba blokové schéma upravit řešením tzv. překřížených vazeb. To se provádí posunutím místa rozvětvení či místa sumace. Dle směru posunutí přidáváme do zpětné, resp. přičítané větve člen o určitém přenosu tak, aby úprava nijak neovlivnila výsledek. Jaký tento přidáný přenos bude pro různé případy můžeme vidět v Tab. 2 a 3. [3, 7]



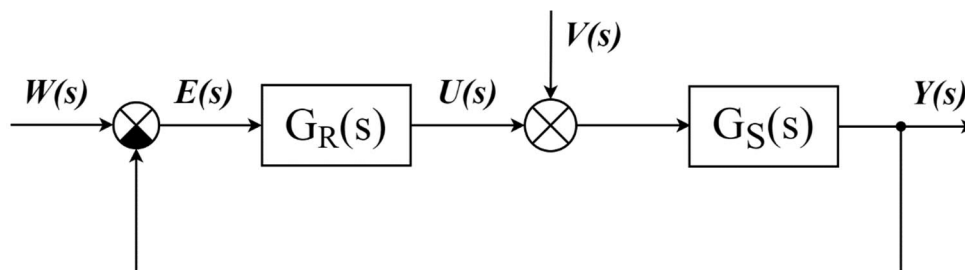
Tab. 2: Řešení překřížených vazeb přesunem místa rozvětvení



Tab. 3: Řešení překřížených vazeb přesunem místa sumace

3.10.5 Regulační obvod v blokové algebře

Vraťme se nyní k blokovému schématu regulačního obvodu, které jsme na začátku kapitoly znázornili v Obr. 4. Označíme-li přenos regulátoru $G_R(s)$, přenos regulované soustavy $G_S(s)$ a žádanou, regulovanou a poruchovou veličinu, regulační odchylku a akční zásah popíšeme jejich obrazy $W(s)$, $Y(s)$, $V(s)$, $E(s)$, $U(s)$, můžeme toto schéma znázornit dle Obr. 16. [3, 7]



Obr. 16: Schéma regulačního obvodu pro blokovou algebru (znázornění 1)

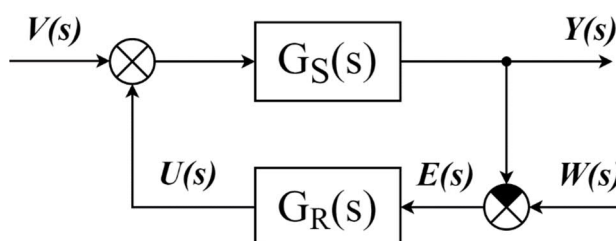
U takového schématu můžeme využít pravidla blokové algebry.

Nejprve budeme uvažovat obvod bez poruchové veličiny $v(t)$, tedy $V(s) = 0$. V takovém případě lze přenosu zapojení jednoduše určit, jelikož se jedná o antiparalelní zapojení, na jehož přímé větvi jsou sériově zapojeny regulátor a regulovaná soustava a na jehož zpětné větvi uvažujeme přenos 1. [2]

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \quad (3.54)$$

Přenos $G_w(s)$ v (3.54) nazýváme přenos řízení a přenos $G_0(s)$, jež je roven součinu přenosu regulátoru a regulované soustavy, přenos rozpojeného obvodu. [3, 7]

Druhým uvažovaným případem je obvod s nenulovou poruchovou veličinou $v(t)$ a nulovou žádanou veličinou $w(t)$, tedy $W(s) = 0$. Opět využijeme antiparalelního zapojení, pro lepší přehlednost je však vhodné obvod „přeskládat“ do podoby v Obr. 17. Jedná se o tentýž obvod jako v Obr. 16.



Obr. 17: Schéma regulačního obvodu pro blokovou algebru (znázornění 2)

Pak platí, že

$$G_v(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_S(s)}{1 + G_S(s) \cdot G_R(s)} = \frac{G_S(s)}{1 + G_0(s)}, \quad (3.55)$$

kde $G_v(s)$ nazýváme přenos poruchy. Ze zapojení v Obr. 17 by se mohlo zdát, že se jedná o kladnou zpětnou vazbu (tedy že ve jmenovateli přenosu by mělo být znaménko mínus),

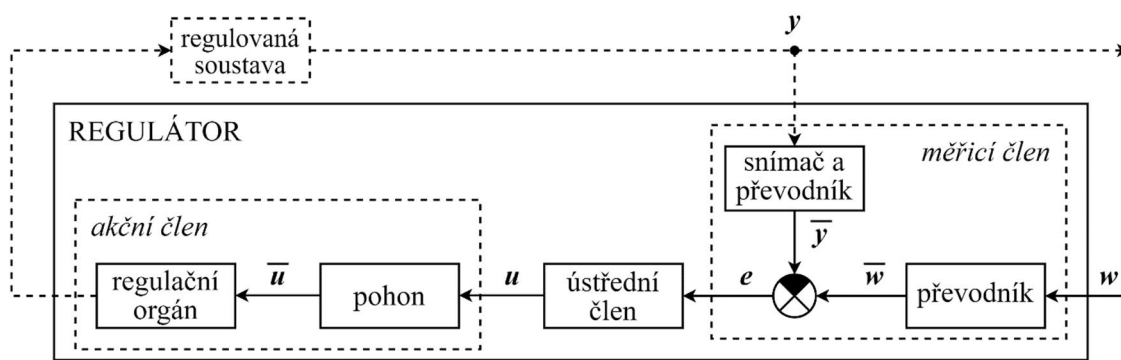
ve zpětné větvi je ovšem signálu v sumačním členu změněno znaménko (uvažujeme $W(s) = 0$, tedy $W(s) - Y(s) = -Y(s)$). [2]

V případě, že bychom pracovali s větším počtem poruchových veličin, je možné $G_n(s)$ opět odvodit pomocí pravidel blokové algebry. [2]

3.11 Regulátory

O funkci regulátoru v regulačním obvodu jsme již hovořili v kapitole 3.1. Na Obr. 4 můžeme vidět, že v takovém obvodu rozlišujeme dvě části – regulátor (řídící systém) a regulovanou soustavu (řízený systém) – přičemž do regulátoru zahrnujeme všechny členy obvodu mimo regulovanou soustavu. [3, 7]

V rámci regulátoru rozlišujeme tři základní prvky – měřicí člen, ústřední člen a akční člen, viz Obr. 18. [2]



Obr. 18: Schéma regulátoru

Měřicí člen tvoří snímač, převodníky a porovnávací člen. Snímač, u něž nám záleží především na jeho přesnosti, odečítá hodnotu regulované veličiny y . Převodník poté tuto veličinu převádí na signál určité fyzikální povahy (elektrické napětí či proud, tlak oleje, aj.). Další převodník totožně upravuje řídicí veličinu w , aby bylo možné následně tyto dvě veličiny odečíst v porovnávacím členu a stanovit regulační odchylku e dle (3.1). [3, 7]

Regulační odchylka poté vstupuje do ústředního členu, který ji dle svých vlastností zesiluje, integruje nebo derivuje. Právě volba vlastností ústředního členu má zásadní vliv na funkci regulátoru a tím i na celý regulační proces. [2]

Poslední část regulátoru – akční člen – je tvořena pohonem a regulačním orgánem. Pohon dodává regulačnímu orgánu energii a mění jeho polohu – otevření, natočení atd. Pojem regulační orgán zahrnuje všechny části, které přímo ovládají akční veličinu – ventily, klapky apod. [2]

Pro zjednodušení přenos měřicího a akčního členu zahrnujeme do přenosu regulované soustavy.

3.11.1 Dynamické vlastnosti ústředního členu regulátoru

Vstupní veličinou ústředního členu je regulační odchylka $e(t)$, výstupní veličinou akční veličina $u(t)$. Určíme-li jejich Laplaceovy obrazy $E(s)$ a $U(s)$, můžeme jeho přenos vyjádřit jako

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)}. \quad (3.56)$$

Nejjednodušším typem je proporcionální neboli P regulátor, který se chová jako prostý zesilovač. P regulátor není schopen zajistit nulovou regulační odchylku, je však přesný a jeho odezva je rychlá. [3, 10]

Integrační člen neboli I regulátor má akční veličinu úměrnou integrálu regulační odchylky. Takovýto člen je schopen odstranit regulační odchylku, je ovšem pomalý a zhoršuje stabilitu systému. [3, 10]

U derivačního neboli D regulátoru je akční veličina rovna derivaci regulační odchylky. Samostatný D regulátor není možné technicky realizovat. Takový člen by totiž reagoval pouze na časové změny regulační odchylky $e(t)$ a neměl by žádné informace o její velikosti. Jako doplněk k P nebo PI regulátoru však zlepšuje stabilitu a má vliv na zkrácení periody kmitu akční veličiny. Z toho důvodu spíše než o D regulátoru hovoříme o D-složce regulátoru. [3, 10]

Kombinací P, I a D regulátorů získáme další typy regulátorů – PI, PD a PID.

Dynamické vlastnosti jednotlivých typů regulátorů můžeme vidět v Tab. 4 (viz následující strana).

V rovnicích a přenosech v Tab. 4 se setkáváme s různými konstantami. Jsou to právě tyto konstanty, jejichž hodnoty rozhodují o výsledné akční veličině. Proporcionální konstanta r_0 neboli zesílení nabývá hodnot od 0,5 do 50. Integrační konstantu r_{-1} a derivační konstantu r_1 můžeme určit z proporcionální jako

$$r_{-1} = \frac{r_0}{T_i}, \quad r_1 = r_0 T_d, \quad (3.57)$$

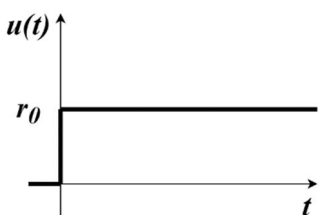
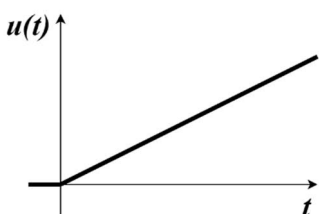
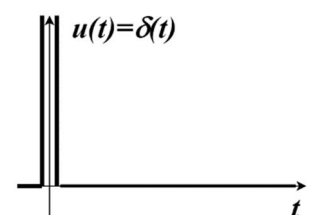
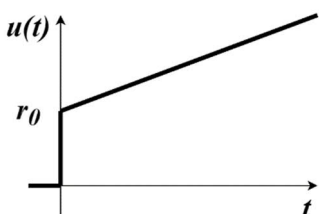
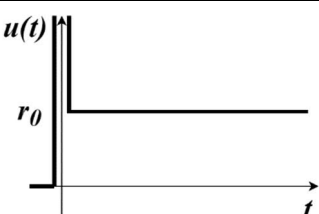
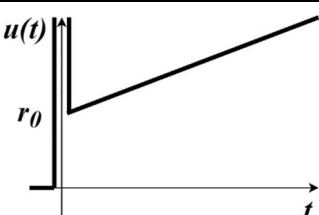
kde T_i je integrační časová konstanta a T_d je derivační časová konstanta. Obě veličiny mají rozměr času a nabývají hodnot cca 0 až 1800 s.

V Tab. 4 si můžeme všimnout, že PID regulátor je nejobecnějším členem, zbývající typy z něj lze získat tak, že některou z konstant r_0, r_{-1} či r_1 položíme rovnu 0.

V Tab. 4 se ve všech případech jedná o ideální případy, u skutečných členů se projevují různá zpoždění daná setrvačností, kapacitou, pasivními odpory atd. Rovnice PID regulátoru by poté byla ve tvaru

$$\dots + T_2 u''(t) + T_1 u'(t) + u(t) = r_0 e(t) + r_{-1} \int e(t) dt + r_1 e'(t). \quad (3.58)$$

Levá strana zahrnuje účinek již zmíněných zpoždění. Velikost setrvačných konstant T_1, T_2, \dots závisí na typu regulátoru – u elektronických jsou tyto hodnoty malé a blíží se ideálnímu regulátoru ($T_1 = T_2 = \dots = 0$), oproti tomu u pneumatických a hydraulických regulátorů nabývají velkých hodnot.

Typ	Rovnice	Přenos $G_R(s)$	Přechodová charakteristika
P	$u(t) = r_0 e(t)$	r_0	
I	$u(t) = r_{-1} \int e(t) dt$	$\frac{r_{-1}}{s}$	
D	$u(t) = r_1 e'(t)$	$r_1 s$	
PI	$u(t) = r_0 e(t) + r_{-1} \int e(t) dt$	$r_0 + \frac{r_{-1}}{s}$	
PD	$u(t) = r_0 e(t) + r_1 e'(t)$	$r_0 + r_1 s$	
PID	$u(t) = r_0 e(t) + r_{-1} \int e(t) dt + r_1 e'(t)$	$r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s$	

Tab. 4: Dynamické vlastnosti regulátorů

4 ŘEŠENÍ KONKRÉTNÍCH ÚLOH REGULACE

Tato kapitola se bude věnovat srovnání složitosti hledání řešení úloh regulace s využitím teorie diferenciálních rovnic a s využitím teorie přenosu, jež je založena na Laplaceově transformaci, což bude ukázáno na konkrétních úlohách.

4.1 Určení regulované veličiny

Cílem následujícího příkladu je poukázat na rozdílnou náročnost určení regulované veličiny $y(t)$ s využitím metody neurčitých koeficientů a s využitím Laplaceovy transformace. Výpočet pomocí teorie diferenciálních rovnic však může být velmi zdoluhavý. Z toho důvodu byl příklad 4.1 zvolen spíše jako teoretický, než že by se jednalo o praktický příklad z teorie regulace s reálným uplatněním.

Příklad 4.1: Soustava buzeného netlumeného kmitání je popsána diferenciální rovnicí $y'' + y = F(t)$, kde síla $F(t) = 4t$. Určete výstupní funkci (regulovanou veličinu) $y(t)$, jsou-li počáteční podmínky $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

a) Metoda neurčitých koeficientů

Nejprve nalezneme homogenní část řešení $y_H(t)$. Určíme charakteristikou rovnici a její kořeny

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i. \quad (4.1)$$

Homogenní řešení je pak ve tvaru

$$y_H(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t. \quad (4.2)$$

Jelikož je nehomogenita ve tvaru polynomu $4t$, můžeme pro určení partikulárního řešení použít metodu neurčitých koeficientů. Partikulární řešení pak očekáváme ve tvaru $y_P(t) = At + B$.

Pro určení koeficientů A, B partikulární řešení dvakrát zderivujeme a dosadíme do původní zadané diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} y_P'(t) &= A \\ y_P''(t) &= 0 \\ 0 + At + B &= 4t \Rightarrow A = 4, B = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Partikulární řešení je tedy

$$y_P(t) = 4t. \quad (4.4)$$

Celkové řešení získáme jako součet řešení homogenního a partikulárního.

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + 4t \quad (4.5)$$

Hodnoty koeficientů c_1, c_2 určíme dosazením počátečních podmínek do (4.5) a do derivace (4.5) jako

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 \sin t + c_2 \cos t + 4t \Rightarrow 0 = 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0, \\ y'(t) &= c_1 \cos t - c_2 \sin t + 4 \Rightarrow 0 = c_1 - 0 + 4 \Rightarrow c_1 = -4. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Hledané řešení (regulovaná veličina) má tvar

$$y(t) = -4 \sin t + 4t. \quad (4.7)$$

Stejného řešení bychom dosáhli i při určování partikulárního řešení metodou variace konstant, která je univerzálnější než zde užitá metoda neurčitých koeficientů, je ovšem pracnější.

b) Řešení Laplaceovou transformací

Určíme obraz zadané diferenciální rovnice a vyjádříme $Y(s)$. Způsob určení obrazu diferenciální rovnice byl ukázán již v příkladu 2.6.

$$s^2 \cdot Y(s) + Y(s) = 4 \cdot \frac{1}{s^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{4}{s^2 \cdot (s^2 + 1)} \quad (4.8)$$

Pro určení $y(t)$ je třeba výraz (4.8) upravit na parciální zlomky.

$$Y(s) = \frac{4}{s^2} - \frac{4}{s^2 + 1} \quad (4.9)$$

Originál funkce $Y(s)$ poté jednoduše získáme aplikací slovníku Laplaceovy transformace (Tab. 1).

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{s^2} - \frac{4}{s^2 + 1} \right\} = 4t - 4 \sin t \quad (4.10)$$

Na příkladu 4.1 lze vidět, že využitím Laplaceovy transformace je hledání řešení diferenciální rovnice značně zjednodušeno. Klasický způsob řešení s využitím metody neurčitých koeficientů vyžaduje znalost derivování (v případě metody variace konstant též integrování) mnohdy složitých funkcí, zatímco při aplikaci Laplaceovy transformace s využitím slovníku (Tab. 1) vystačíme s algebraickými úpravami.

4.2 Přechodová funkce

Příklad 4.2: Soustava buzeného tlumeného kmitání je popsána diferenciální rovnicí $y'' + 2y' + 5y = F(t)$. Určete její přechodovou funkci, tedy odezvu pro $F(t) = \eta(t)$ (jednotkový skok) při nulových počátečních podmínkách.

a) Metoda neurčitých koeficientů

Nalezneme homogenní část řešení y_H . Určíme charakteristikou rovnici, její kořeny a tvar homogenního řešení.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i \quad (4.11)$$

$$y_H(t) = c_1 \cdot e^{-t} \sin 2t + c_2 \cdot e^{-t} \cos 2t \quad (4.12)$$

Jednotkový skok $\eta(t)$ lze jednoduše popsat jako $F(t) = 1$. Na základě této nehomogenity předpokládáme partikulární řešení ve tvaru $y_p(t) = A$. Po dvojnásobné derivaci a dosazení do původní diferenciální rovnice zjistíme, že $A = \frac{1}{5}$, tedy $y_p(t) = \frac{1}{5}$.

Celkové řešení získáme jako součet homogenního a partikulárního řešení.

$$y(t) = y_H(t) + y_p(t) = c_1 \cdot e^{-t} \sin 2t + c_2 \cdot e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{5} \quad (4.13)$$

Dosazením počátečních podmínek určíme koeficienty c_1, c_2 a získáme celkové řešení ve tvaru

$$y(t) = -\frac{1}{10} \cdot e^{-t} \sin 2t - \frac{1}{5} \cdot e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{5}, \quad (4.14)$$

kde $y(t)$ je hledaná přechodová funkce.

b) Řešení Laplaceovou transformací s využitím přenosu

Dle (3.19) víme, že přechodovou funkci $h(t)$ lze získat zpětnou Laplaceovou transformací přenosu systému vyděleného komplexní proměnnou s .

Nejprve tedy určíme přenos systému

$$s^2 \cdot Y(s) + 2s \cdot Y(s) + 5 \cdot Y(s) = U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}. \quad (4.15)$$

Přenos vydělíme komplexní proměnnou s , rozložíme na parciální zlomky a upravíme do tvaru, který umožňuje použití slovníku Laplaceovy transformace.

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s \cdot (s^2 + 2s + 5)} = \\ &= \frac{\frac{1}{5}}{s} - \frac{\frac{1}{5} \cdot s + \frac{2}{5}}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s+1)^2 + 4} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Přechodovou funkci $h(t)$ poté jednoduše získáme aplikací slovníku Laplaceovy transformace (Tab. 1).

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s+1)^2 + 4} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \left(e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} \sin 2t \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Přechodovou charakteristiku bychom s využitím Laplaceovy transformace mohli určit také bez využití přenosu, a to jako nalezení řešení diferenciální rovnice, přičemž obraz jednotkového skoku $\eta(t)$ by byl roven $\frac{1}{s}$ (2.42).

4.3 Impulsní funkce

Příklad 4.3: Mějme stejnou soustavu jako v příkladu 4.2. Určete její impulsní funkci, tedy odezvu pro $F(t) = \delta(t)$ (Diracův jednotkový impuls) při nulových počátečních podmínkách.

Nehomogenita takového rovnice je rovna Diracovu jednotkovému impulsu, nelze tudíž použít metodu neurčitých koeficientů. Metoda variace konstant by pro tuto nehomogenitu byla rovněž velmi obtížná. Impulsní funkci tedy nalezneme aplikací Laplaceovy transformace, ať už ji použijeme při hledání řešení diferenciální rovnice či využijeme (3.17) pro výpočet pomocí přenosu.

a) Řešení Laplaceovou transformací s využitím přenosu

Dle (3.17) víme, že impulsní funkci lze získat zpětnou Laplaceovou transformací přenosu systému.

Přenos tohoto systému jsme vyjádřili již v příkladu 4.2 (4.15). Je třeba jej upravit tak, aby bylo možné využít slovník Laplaceovy transformace.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1 - 1 + 5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s+1)^2 + 4} \quad (4.18)$$

Impulsní funkci $g(t)$ poté jednoduše získáme aplikací slovníku Laplaceovy transformace (Tab. 1).

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s+1)^2 + 4} \right\} = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} \sin 2t \quad (4.19)$$

b) Využití vztahu mezi přechodovou a impulsní funkcí (3.22)

Další možností, jak impulsní funkci $g(t)$ určit, je využití jejího vztahu s přechodovou funkcí $h(t)$. Podle (3.22) je impulsní funkce derivací přechodové funkce podle času.

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{dh(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5} \left(e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} \sin 2t \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{5} \left(-e^{-t} \cos 2t - 2 \cdot e^{-t} \sin 2t - \frac{1}{2} \cdot e^{-t} \sin 2t + e^{-t} \cos 2t \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^{-t} \sin 2t \end{aligned} \quad (4.20)$$

Přestože jsme tímto způsobem získali stejný výsledek jako při výpočtu s využitím přenosu, byla zapotřebí znalost derivování a tvaru přechodové funkce $h(t)$ pro daný systém.

5 VYUŽITÍ PROGRAMU MATLAB

Software MATLAB firmy *The MathWorks, Inc.* obsahuje množství prostředků pro práci s Laplaceovou transformací, pro vykreslení impulsní a přechodové charakteristiky a pro řešení blokové algebry. Značně tak usnadňuje a urychluje výpočty.

V rámci této kapitoly se budeme věnovat syntaxi těchto příkazů [2, 8]. Následně bude jejich aplikace ukázána na příkladech. Některé příklady byly již řešeny v předchozí kapitole.

5.1 Laplaceova transformace

Při řešení Laplaceovy transformace využívá MATLAB nástroje knihovny *Symbolic Math Toolbox*, jež umožňuje řešení, vykreslování a manipulaci s matematickými rovnicemi.

Přímá Laplaceova transformace je uskutečněna příkazem `laplace(f)`, kde f je funkce času, jejíž obraz chceme nalézt. Před provedením transformace je třeba určit, čeho je funkce proměnná, k čemuž používáme příkaz `syms`. V příkladu níže jsou proměnnými čas t a koeficient a .

```
syms t a %promennými jsou t a a
f = a*t - 2*exp(-t); %definování funkce f(t)
L = laplace(f) %určení Laplaceova obrazu funkce f

L = a/s^2 - 2/(s + 1)
```

Pro zpětnou Laplaceovu transformaci využíváme příkaz `ilaplace(L)` z anglického *inverse Laplace*, kde L je funkce, jejíž originál chceme určit. Opět je třeba definovat proměnné.

```
syms s a %promennými jsou s a a
L = a/s^2 - 2/(s+1); %definování funkce L(s)
f = ilaplace(L) %určení originalu funkce L

f = a*t - 2*exp(-t)
```

5.2 Řešení diferenciálních rovnic

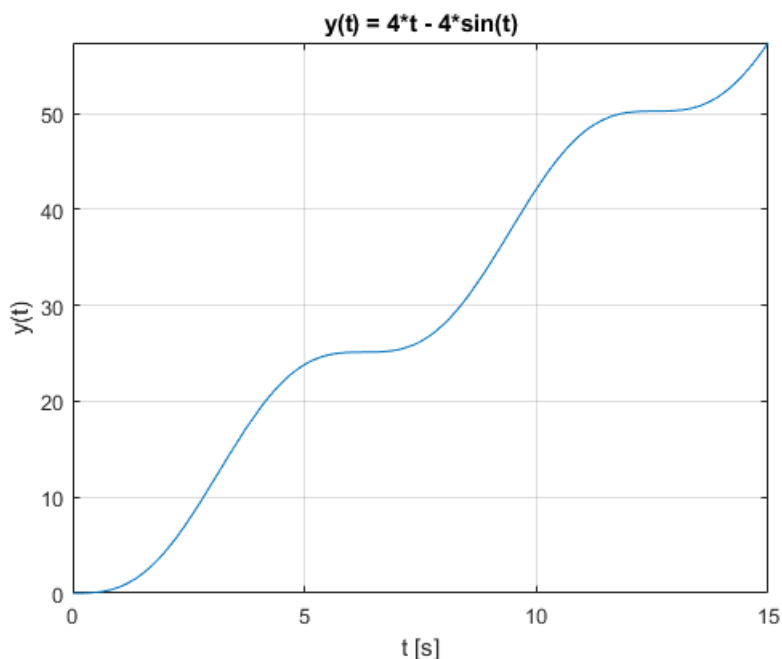
Nyní se podíváme na způsob řešení diferenciálních rovnic s využitím Laplaceovy transformace v MATLABu. K tomu využijeme příklad 4.1.

Nejprve je třeba definovat proměnné – časovou proměnnou t , komplexní proměnnou s , hledanou funkci $y(t)$, její obraz Y a řešenou diferenciální rovnici. Poté je již možné aplikovat Laplaceovu transformaci příkazem `laplace` pro určení obrazu zadané funkce.

Pro lepší přehlednost přeznačíme pomocí příkazu `subs` obraz funkce $y(t)$ na Y . Stejný příkaz využijeme i při dosazení nulových počátečních podmínek. Příkazem `solve` vyjádříme z funkce F proměnnou Y .

Zpětná transformace pro určení hledané funkce $y(t)$ je pak již velmi jednoduchá – stačí použít příkaz `ilaplace`. Výslednou funkci můžeme vykreslit příkazem `fplot`.

```
syms t s y(t) Y %definovani promennych
f = diff(y(t),t,t) + y(t) == 4*t; %zadana diferencialni rovnice
F = laplace(f); %aplikace Laplaceovy transformace
F = subs(F,laplace(y(t)),Y); %preznaceni y(t) na Y
F = subs(F,[y(0), subs(diff(y(t),t),t,0)],[0, 0]); %y(0)=0,y'(0)=0
F = solve(F,Y); %vyjadreni Y
y = ilaplace(F) %zpetna transformace
fplot(y,[0 15]); %vykresleni
grid on
title(sprintf('y(t) = %s', string(y)));
xlabel('t [s]');
ylabel('y(t)');
y = 4*t - 4*sin(t)
```



Obr. 19: Vykreslení regulované veličiny (příklad 4.1)

Řešení získané využitím programu MATLAB je totožné s řešením z kapitoly 4.

Vedle rychlosti výpočtu je MATLAB výhodným prostředkem pro řešení diferenciální rovnice proto, že umožňuje funkci $y(t)$ (hledanou regulovanou veličinu) vykreslit (Obr. 19).

Tento způsob řešení diferenciálních rovnic urychluje výpočet, není však příliš používán, jelikož řešení obyčejné diferenciální rovnice lze v MATLABu přímo získat příkazem `ode()` (z anglického *ordinary differential equations*).

5.3 Definice přenosu

Pro práci s přenosem, impulsní a přechodovou charakteristikou a blokovou algebrou využívá MATLAB knihovnu *Control System Toolbox*.

Přenos lze v rámci MATLABu zapsat několika způsoby.

První z nich je ve tvaru $\text{sys}=\text{tf}(b,a)$, kde b , a jsou řádkové vektory obsahující koeficienty pravé, resp. levé strany diferenciální rovnice, jíž je daný systém popsán. Ze třetí kapitoly víme, že koeficienty pravé strany odpovídají koeficientům čitatele přenosu, zatímco koeficienty strany levé odpovídají koeficientům jmenovatele přenosu ((3.2), (3.11)).

V případě nepřítomnosti některé z mocnin komplexní proměnné s je třeba na dané místo vektoru zapsat 0.

```
b = [1]; %koeficienty prave strany (citatel prenosu)
a = [2 0 1]; %koeficienty leve strany (jmenovatel prenosu)
sys = tf(b,a) %urceni prenosu
```

$$\text{sys} = \frac{1}{2s^2 + 1}$$

Dále můžeme přenos zapsat z vyjádření s póly a nulami (3.12) jako $\text{sys}=\text{zpk}(z,p,k)$, kde z je řádkový vektor nul, p je řádkový vektor pólů a k je zesílení. Hodnota k odpovídá podílu $\frac{b_m}{a_n}$ dle (3.12).

```
z = [ ]; %nuly prenosu
p = [-1 2]; %poly prenosu
k = 1.5; %zesileni
sys = zpk(z,p,k) %urceni prenosu
```

$$\text{sys} = \frac{1.5}{(s+1)(s-2)}$$

5.4 Impulsní charakteristika

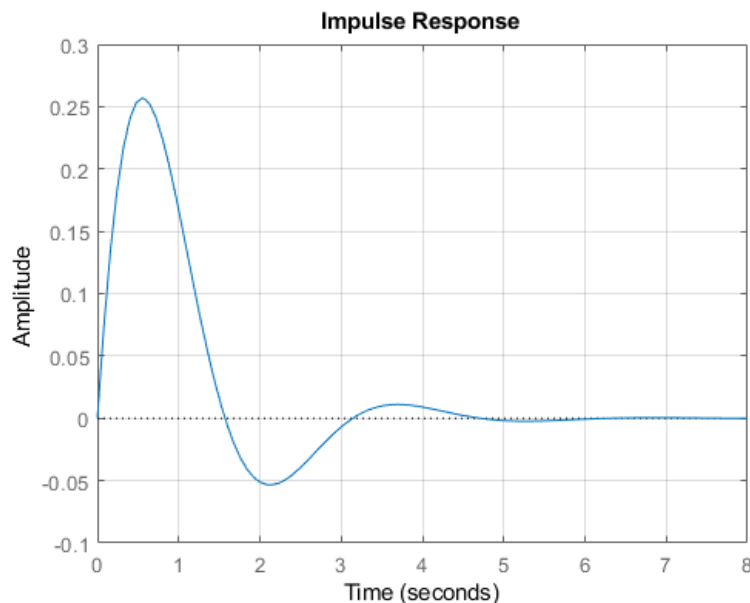
Vykreslení odezvy na jednotkový impuls (impulsní charakteristiky) lze v MATLABu uskutečnit příkazem `impulse(sys)`, kde sys je přenos systému. Při takovém zápisu je vykreslený rozsah času odezvy volen automaticky. Chceme-li tento rozsah změnit, je třeba přidat parametr t v podobě $t_0:dt:t_f$, tedy počáteční čas, časový krok a konečný čas. V případě, že chceme zachovat nulový počáteční čas vykreslení, stačí zapsat hodnotu konečného času.

Lze také nastavit parametry vykreslované čáry (barva, typ).

Chceme-li hodnoty přechodové funkce uložit do vektorů, zapíšeme `[x,y]=impulse(sys)`.

Pro ukázkou použití tohoto příkazu byl využit systém dle příkladu 4.3.

```
syms s
sys = tf(1,[1 2 5]); %prenos systemu
impulse(sys,8); %vykresleni impulsni funkce
grid on
```



Obr. 20: Impulsní charakteristika (příklad 4.3)

Příkaz `impulse()` nám umožňuje vykreslení impulsní charakteristiky, ovšem nezískáme z něj předpis impulsní funkce. Pro vyjádření funkce $g(t)$ bychom museli provést zpětnou Laplaceovu transformaci přenosu systému (3.17). Příkaz `ilaplace()` však není schopen pracovat se systémem daným příkazem `tf()` či `zpk()`, přenos je tedy třeba definovat jako podíl dvou polynomů.

```
syms s
sys = 1/(s^2 + 2*s + 5); %prenos systemu jako podil dvou polynomu
g = ilaplace(sys) %zpetna transformace prenosu

g = (sin(2*t)*exp(-t))/2
```

Získaný předpis impulsní funkce se shoduje s řešením získaným v kapitole 4.

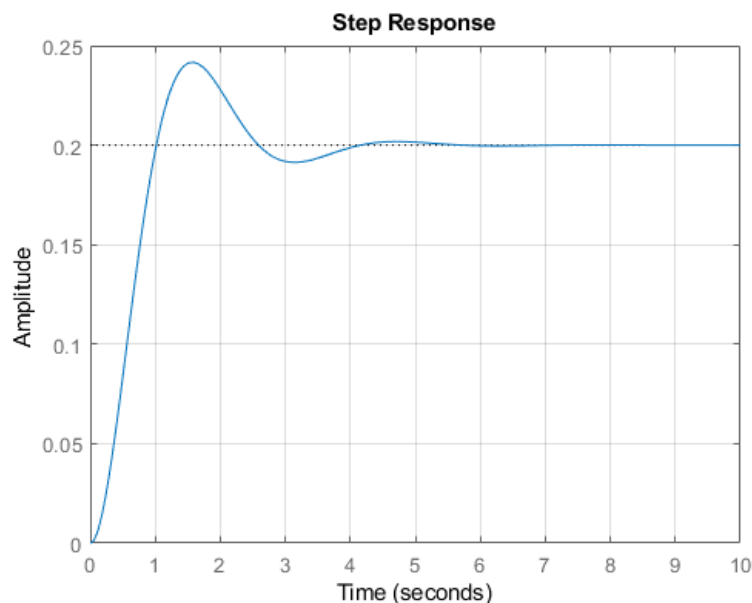
Taktéž bychom mohli využít řešení diferenciální rovnice, jejíž pravá strana je rovna jednotkovému (Diracovu) impulsu $\text{dirac}(t)$.

5.5 Přechodová charakteristika

Pro vykreslení odezvy na jednotkový skok využíváme příkaz `step(sys)`. Jeho syntaxe je shodná s výše popsanou u příkazu `impulse()`.

Pro ukázkou použití tohoto příkazu byl využit systém dle příkladu 4.2.

```
syms s
sys = tf(1,[1 2 5]); %prenos systemu
step(sys,0:0.01:10); %vykresleni prechodove funkce
grid on
```



Obr. 21: Přechodová charakteristika (příklad 4.2)

Stejně jako v případě příkazu `impulse()` nezískáme užitím `step()` vyjádření přechodové funkce, pouze její vykreslení. Funkci $h(t)$ v tomto případě získáme zpětnou transformací přenosu poděleného komplexní proměnnou s (3.20) nebo řešením diferenciální rovnice, jejíž pravá strana je rovna jednotkovému skoku (Heavisideově funkci) `heaviside(t)`.

```
syms s
sys = 1/(s^2 + 2*s + 5); %prenos systemu jako podil dvou polynomu
sys_s = sys/s; %podeleni prenosu systemu komplexni promennou s
h = ilaplace(sys_s) %zpetna transformace podeleného prenosu

h = 1/5 - (exp(-t)*(cos(2*t) + sin(2*t)/2))/5
```

Získaný předpis přechodové funkce se shoduje s řešením získaným v kapitole 4.

5.6 Bloková algebra

Řešení blokové algebry v MATLABu je rovněž založeno na výpočtu přenosů dílčích zapojení se třemi základními zapojeními – sériovým, paralelním a zpětnovazebním. Pro určení přenosů těchto dílčích zapojení užíváme tyto příkazy:

`series(G1,G2)` pro sériové zapojení,

`parallel(G1,G2)` pro paralelní zapojení,

`feedback(G1,G2)` pro zpětnovazební (antiparalelní) zapojení,

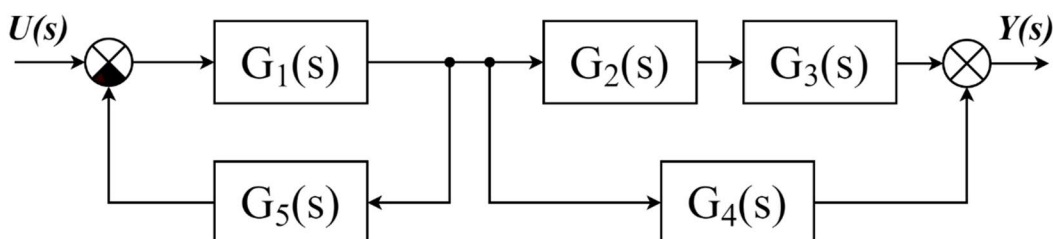
přičemž G_1 , G_2 jsou přenosy zapojených členů. U zpětnovazebního zapojení je G_1 přenos přímé větve a G_2 přenos větve zpětné.

Příkaz `feedback()` pro zpětnovazební zapojení předpokládá zápornou zpětnou vazbu. Pokud bychom chtěli kladnou zpětnou vazbu, museli bychom za identifikátory přenosů dopsat třetí parametr 1.

Pokud by zapojené členy měly větší množství vstupů či výstupů, je vždy nutné specifikovat podobu zapojení.

Práci s příklady blokové algebry ukážeme na příkladu 5.1.

Příklad 5.1: Mějme zapojení dle Obr. 22. Určete výsledný přenos zapojení, jsou-li přenosy jednotlivých členů $G_1 = \frac{1}{2s}$, $G_2 = \frac{2s}{s+1}$, $G_3 = \frac{0,5}{s+2}$, $G_4 = \frac{1}{2}$, $G_5 = \frac{2s+1}{s^2}$.



Obr. 22: Zadání příkladu 5.1

```
%definice prenosu jednotlivych clenu systemu
G1 = tf(1, [2 0]);
G2 = tf([2 0], [1 1]);
G3 = tf(0.5, [1 2]);
G4 = tf(1, 2);
G5 = tf([2 1], [1 0 0]);

G15 = feedback(G1,G5); %prenos zpetnovazebniho zapojeni
G23 = series(G2,G3); %prenos serioveho zapojeni
G234 = parallel(G23,G4); %prenos paralelniho zapojeni
G = series(G15,G234) %celkovy prenos systemu
```

$$G = \frac{s^4 + 5s^3 + 2s^2}{4s^5 + 12s^4 + 12s^3 + 14s^2 + 14s + 4}$$

Bloková algebra je neodmyslitelnou součástí teorie regulace, jež je založena na teorii přenosu. Výpočty celkového přenosu obvodu jsou však často početně pracné. Právě proto je využití programu MATLAB velmi výhodné.

6 ZÁVĚR

Cílem této bakalářské práce bylo zpracování rešerše na téma Laplaceova transformace v teorii regulace. Tato rešerše byla teoretickým základem pro praktickou část, zejména pro srovnání složitosti řešení úloh regulace z pohledu teorie diferenciálních rovnic a teorie řízení.

Laplaceova transformace umožňuje převést lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty na rovnici algebraickou. Jelikož jsou algebraické úpravy značně jednodušší než hledání řešení diferenciální rovnice klasickým způsobem (hledání homogenního a poté partikulárního řešení), zjednodušení je opravdu znatelné. Ve prospěch této integrální transformace taktéž hraje fakt, že diferenciální rovnice jsou využívány pro popis systémů v široké škále technických oborů.

V úvodní kapitole je čtenář seznámen s nejdůležitějšími vlastnostmi Laplaceovy transformace, které vytvářejí základ pro následné odvození Laplaceova obrazu jednotkového (Diracova) impulsu, jednotkového skoku (Heavisideovy funkce) a přehledu nejčastěji užívaných funkcí, tzv. operátorového slovníku Laplaceovy transformace. Rovněž je ukázána aplikace transformace při hledání řešení diferenciální rovnice. Navazující kapitola nabízí pohled na využití Laplaceovy transformace v teorii regulace. Mimo jiné je definován přenos, jež je Laplaceovou transformací odvozen z diferenciální rovnice popisující systém. Vysvětleny jsou rovněž impulsní a přechodová funkce, včetně jejich odvození. Dále je uvedeno rozdělení regulačních členů a jejich charakteristické přenosy. Závěr kapitoly je věnován pravidlům blokové algebry a regulačním obvodům.

V rámci první poloviny praktické části jsou řešeny tři konkrétní úlohy regulace z teorie kmitání – první je věnována hledání regulované veličiny, druhá řeší přechodovou funkci a poslední se zabývá funkcí impulsní. Vždy je ukázáno hledání řešení bez a s využitím Laplaceovy transformace. Hledání řešení bez využití Laplaceovy transformace je (je-li to možné) uskutečněno metodou neurčitých koeficientů, jež vyžaduje znalost derivace. Pokud bychom použili obecnější metodu – metodu variace konstant – byla by vyžadována taktéž znalost integrace. Oproti tomu hledání řešení s aplikací Laplaceovy transformace s využitím operátorového slovníku vyžaduje pouze algebraické úpravy. Můžeme tedy říct, že využití Laplaceovy transformace, ať už s využitím přenosu či bez něj, zkracuje čas výpočtu a snižuje náročnost řešení.

V závěrečné části této bakalářské práce je poukázáno na výhody, jež nabízí knihovny softwaru MATLAB. Jsou uvedeny příkazy, jež využíváme při aplikaci Laplaceovy transformace a při definici přenosu. Pro ukázkou některých příkazů jsou využity příklady z předchozí kapitoly, čímž je ověřena správnost jejich řešení. Jeden z příkladů je taktéž věnován výpočtu přenosu zapojení pomocí pravidel blokové algebry. Nespornou výhodou programu MATLAB je snížení časové náročnosti výpočtu a možnost vykreslení regulované funkce a impulsní a přechodové charakteristiky.

7 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] Laplaceova transformace. ŠKRÁŠEK, Josef a Zdeněk TICHÝ. *Základy aplikované matematiky II*. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1986, s. 746-767.
- [2] ŠVARC, Ivan. Automatické řízení. Vyd. 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011. ISBN 978-80-214-4398-3.
- [3] Laplace Transform. UNIVERSITY OF UTAH: Department of Mathematics. *DE and Linear Algebra manuscripts* [online]. 2003, s. 256-280 [cit. 2021-4-18]. Dostupné z: <https://www.math.utah.edu/~gustafso/laplaceTransform.pdf>
- [4] Funkce komplexní proměnné. ŠKRÁŠEK, Zdeněk a Zdeněk TICHÝ. *Základy aplikované matematiky II*. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1986, s. 689-745.
- [5] UNIVERZITA TOMÁŠE BATI VE ZLÍNĚ. Fakulta aplikované informatiky. *Některé vlastnosti Laplaceovy transformace a obrazy elementárních funkcí*. [online]. [cit. 2021-3-20]. Dostupné z: <http://rtp.webzdarma.cz/laplace2.php>
- [6] KUBÍK, Stanislav, Zdeněk KOTEK a Miroslav ŠALAMON. Teorie regulace: I. Lineární regulace. 2. oprav.vyd. Praha: SNTL, 1974.
- [7] VÍTEČKOVÁ, Miluše. *Základy automatické regulace*. Přepřac. 2. vyd. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2008. ISBN ISBN978-80-248-1924-2.
- [8] *MathWorks: MATLAB* [online]. [cit. 2021-5-12]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>

8 SEZNAM OBRÁZKŮ

- Obr. 1 Modelová funkce pro odvození Diracova impulsu
- Obr. 2 Schéma řešení diferenciálních rovnic
- Obr. 3 Schéma ovládání a regulace
- Obr. 4 Blokové schéma regulačního obvodu
- Obr. 5 Blokové schéma regulačního členu, resp. systému
- Obr. 6 Odezva systému na jednotkový impuls (impulsní charakteristika)
- Obr. 7 Odezva systému na jednotkový skok (přechodová charakteristika)
- Obr. 8 Přechodové charakteristiky různých druhů regulačních členů
- Obr. 9 Přechodové charakteristiky vybraných typů proporcionálních členů
- Obr. 10 Přechodové charakteristiky vybraných typů derivačních členů
- Obr. 11 Přechodové charakteristiky vybraných typů integračních členů
- Obr. 12 Odezva systému na vstup se sinusovým průběhem
- Obr. 13 Sériové zapojení
- Obr. 14 Paralelní zapojení
- Obr. 15 Antiparalelní (zpětnovazební) zapojení
- Obr. 16 Schéma regulačního obvodu pro blokovou algebru (znázornění 1)
- Obr. 17 Schéma regulačního obvodu pro blokovou algebru (znázornění 2)
- Obr. 18 Schéma regulátoru
- Obr. 19 Vykreslení regulované veličiny (příklad 4.1)
- Obr. 20 Impulsní charakteristika (příklad 4.3)
- Obr. 21 Přechodová charakteristika (příklad 4.2)
- Obr. 22 Zadání příkladu 5.1

9 SEZNAM TABULEK

Tab. 1 Operátorový slovník Laplaceovy transformace

Tab. 2 Řešení překřížených vazeb přesunem místa rozvětvení

Tab. 3 Řešení překřížených vazeb přesunem místa sumace

Tab. 4 Dynamické vlastnosti regulátorů